本コンテンツは

池辺八洲彦、池辺淑子、浅井信吉、宮崎佳典、
現代線形代数、共立出版、２００９
ISBN：９７８－４３２００１８８１５

の前身です。
上記書籍では、より理解しやすいように改定され、誤植も校正してあります。

レッスン１　行列算

この最初のレッスンでは行列算主体の話をする。すでによく知っているラーナーは快速ペースで読み進めて頂けばよい。行列の考えを一般化したベクトル空間と線形変換（線形写像ともいう）の話はレッスン 2 の主題である。線形変換は最も簡単な数理的因果関係を表し、これが線形代数の主な研究テーマである。

1.1　例から入門

次に示すのは、一端を壁内に固定された、水平な細い梁（はり）が鉛直集中荷重 f_1, f_2, f_3 を受けて変形する様子を模式的に表した図である（プールの飛び込み台に２，３人が乗った状態と似ている）。与えられた観測点 P_1, P_2 における梁の鉛直方向へのたわみを y_1, y_2 としよう。これらの正の方向は予め決めておくものとする。

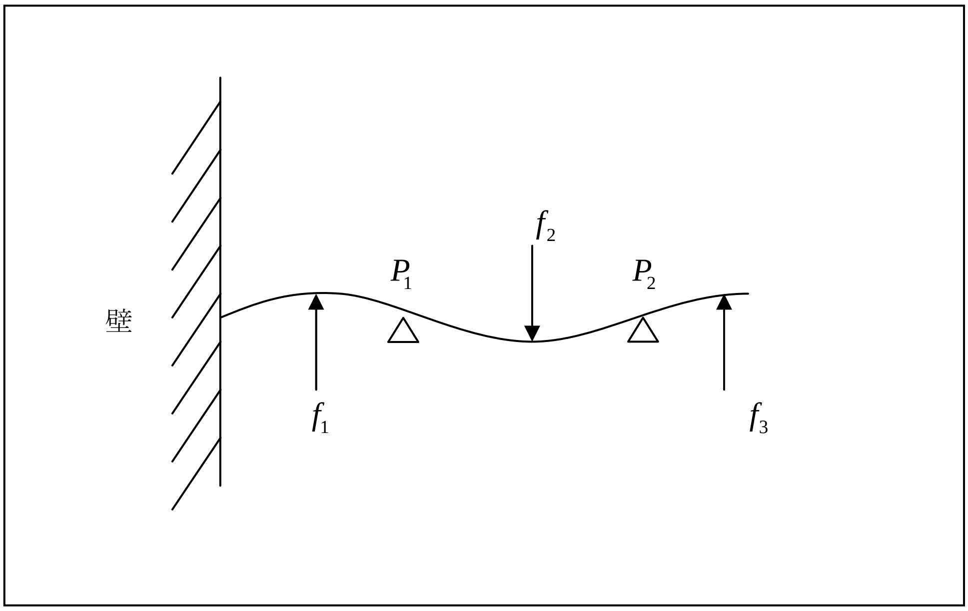


図 1.1　 細い片持ち梁（壁内に一端を固定された梁）の変形モデル図

変形が微小である場合に成り立つ弾性モデルによると、荷重 f_1, f_2, f_3 によって起こる変形量 y_1, y_2 は次式で与えられる：

$$(1)\qquad \begin{aligned} y_1 &= a_{11} f_1 + a_{12} f_2 + a_{13} f_3 \\ y_2 &= a_{21} f_1 + a_{22} f_2 + a_{23} f_3 \end{aligned}$$

ここに係数 $a_{11},\cdots,a_{23}$ は梁の材質、形状、荷重の作用する点の位置のみによって定まり、荷重 f_1, f_2, f_3 の値には依存しない定数を表す。観測点を３点に増やせば、式数が３に増え、荷重数が４個に増えれば、右辺の変数の数も４に増え、定数 $a_{11},\cdots$ の数も値も異なってくる。

因果関係を強調するには、原因と結果と作用の仕方を分離して書けばよいであろう。そこで原因＝力、結果＝たわみ、作用＝係数全体、作用の仕方＝右辺の形、と考え、それぞれをまとめて<u>行列</u>、すなわち、「碁盤目状に数を入れる母型」の形に書き、それぞれを単一の記号で表すのが便利であろう。すなわち、(1)を次のように書く：

$$(2)\qquad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad \text{または} \quad \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{f}$$

このように、行列は通常太字体で表す。(1)式中で横に現れる $f_1,\cdots$ をこの式で縦書きにするのは、後述する<u>行列積</u>の定義に従っているからである。この式を見ると、$\mathbf{A}$ は任意の $\mathbf{f}$ を(2)によって $\mathbf{y}$ に対応させる写像と解釈できる。右辺の乗算の意味は(1)式から定まる。この写像が<u>線形変換</u>（線形写像）と呼ばれるものの一例である。

(2)の意味は(1)である。したがって、

(3) $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$　$\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$　$\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

以上の式から､｢すべての荷重が同時に作用する場合の各たわみ(1)は各点に単位荷重が単独に作用した場合の梁のたわみ(3)の荷重倍の代数和に等しい｣ことになる。この事実は重ね合わせの原理と呼ばれている。これは(2)で定義される線形変換の著しい特徴である。

1.2　行列の言葉

既述のように、線形代数とは線形変換の組織的研究を行う数学の一分野である。線形代数の主要な問題の定式化も、考察の記述も、線形代数の言葉が使われる。そこで、まずはその基本となる行列の言葉の説明からはじめよう。

次図のように「もの」を長方形状に規則正しく並べたもの、

$$\begin{bmatrix} x & x & \cdots\cdots\cdots & x \\ x & x & \cdots\cdots\cdots & x \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \\ x & x & \cdots\cdots\cdots & x \end{bmatrix}$$

を行列 matrix という。括弧$[\quad]$は区切り記号である。"x"印の位置にはふつう実数 real number または複素数 complex number が入るが、より一般的には体 field と呼ばれる数理系の元 element が入る。｢matrix｣とは「物を入れる型枠または母体」という意味である（mother を意味するラテン語 $m\bar{a}ter$ より)。体の満たすべき公理系 axiom についてはここではのべない。ラーナーは体とは実数全体か複素数全体を加減乗除の四則演算とともに考えたものと、思っておけば十分である。ふつう実数全体を $\mathbf{R}$ 、複素数全体を $\mathbf{C}$ で表すことが多い。

線形代数では、行列に対して体の元を習慣的にスカラーscalar と呼ぶ。行列の成分が与えられた体 $\mathbf{F}$ の元である場合､その行列を体 $\mathbf{F}$ 上の行列 matrix over field $\mathbf{F}$ といういい方をする。

横の行 row を上から順に第１行、第２行、・・・と呼び、縦の列 column を左から順に第１列、第２列､・・・と呼ぶ。行列はふつう太字体で書き（例：$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \cdots$）、スカラーは細字体の小文字で書く（例：$a, b, \alpha, \beta, \cdots$）。$m$ 行、n 列からなる行列を $m \times n$ 行列といい $m \times n$ を型 size,dimension という（m, n は自然数、"$m \times n$"は"m by n"と読む)。とくに、$m=1$ の場合は n 次行ベクトル row vector、$n=1$ の場合は m 次列ベクトル column vector ともいう。

$m \times n$ 行列の一般形は

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

である。とくに $m=n$ の場合、m 次正方行列（あるいは略して m 次行列）square matrix of order m という。スカラー a_{ij} は第 i 行と第 j 列の交差する位置にある (i, j) 成分 component（元、要素 element ともいう）を表す（$i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n$）。読みやすいように、２個の添え字 i, j の間をコンマで区切り、$a_{i,j}$ のように表記することもある。とくに、$a_{11}, a_{22},\cdots$ を対角成分 diagonal component といい、対角成分全体を主対角線 main diagonal という。対角成分以外の成分を非対角成分 off-diagonal component という。前後関係から誤解の生じる恐れのない場合は上の行列を単に $\begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ と略記することもあるが、実際の型については前後関係による了解が必要である。

線形代数では各行、各列をそれぞれ一つの行列とみなすと便利なことが多い。すなわち、

第 i 行＝$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} \cdots a_{in} \end{bmatrix}$ ：$1\times n$ 行列（$i=1,\cdots,m$）、

第 j 列＝$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ ：$m\times 1$ 行列（$j=1,\cdots,n$）

成分がすべて実数である行列を実行列 real matrix といい、成分がすべて複素数である行列を複素行列 complex matrix という。このコンテンツで扱うのはこのどちらかである。

$m\times n$ 実行列全体の集合を記号 $\mathbf{R}^{m\times n}$ 、$m\times n$ 複素行列全体の集合を $\mathbf{C}^{m\times n}$ で表すことにする。1×1 行列、すなわち $\begin{bmatrix} x \end{bmatrix}$ 型の行列、は実数または複素数と同一視できる場合も多いが、スカラーと行列とは違う概念であるから、慣れるまでは 1×1 行列はあくまで行列と考えておくのが無難である。

例　$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$ は 1×1 行列、$\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \end{bmatrix}$ は 2×3 行列、$\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 \end{bmatrix}$ は 1×3 行列、または３次行ベクトル、$\begin{bmatrix} 11 \\ 21 \end{bmatrix}$ は 2×1 行列、または２次列ベクトル、を表す。これらはすべて実行列の例である。

1.3　行列の相等

本節以降では、行列の相等 equality、行列算 matrix operation および関連概念の説明を行う。説明の便宜上、ここでは一般的な体 $\mathbf{F}$ 上の行列について考える。実際には $\mathbf{F}$ は実数全体 $\mathbf{R}$ または複素数全体 $\mathbf{C}$ のことと思って差し支えない。これに従って $\mathbf{F}$ 上の $m \times n$ 行列の全体を $\mathbf{F}^{m\times n}$ と書くことにする。

相等関係は型が同じ行列に対してのみ定義される。すなわち、

$$\mathbf{A} \equiv \left[a_{ij}\right], \mathbf{B} \equiv \left[b_{ij}\right] \in \mathbf{F}^{m\times n} \text{ に対して、} \mathbf{A} = \mathbf{B} \text{ とは } a_{ij} = b_{ij} \, (i = 1, \cdots, m, \; j = 1, \cdots, n)$$

であることと定義する。いいかえると、対応する成分がすべて相等しいとき、かつこのときに限り、$\mathbf{A} = \mathbf{B}$ と定義する。次の諸性質は体 $\mathbf{F}$ に対して成り立つ性質からの継承である：

(1) 回帰性 reflexivity　$\mathbf{A} = \mathbf{A}$

(2) 対称性 symmetry　$\mathbf{A} = \mathbf{B}$ なら $\mathbf{B} = \mathbf{A}$

(3) 推移性 transitivity　$\mathbf{A} = \mathbf{B}, \mathbf{B} = \mathbf{C}$ なら $\mathbf{A} = \mathbf{C}$

例　$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ とは $x = 1, y = -1$ を意味する。また $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$。

1.4　和

和 sum は型が同じ行列に対してのみ定義される。すなわち、$\mathbf{A} \equiv \left[a_{ij}\right], \mathbf{B} \equiv \left[b_{ij}\right] \in \mathbf{F}^{m\times n}$ に対して和は

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}] \in \mathbf{F}^{m\times n} \; (i = 1, \cdots, m, \; j = 1, \cdots, n)$$

によって定義される。いいかえれば、行列の和とは対応する成分の和をとって得られる同型の行列を表す。和に対して

(1) 結合則 associative law　$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$、

(2) 交換則 commutative law　$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

が成立する。これまた体 $\mathbf{F}$ に対して成り立つ性質からの継承に過ぎない。両者のおかげで、3 個以上の行列の和を単に $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \cdots + \mathbf{C}$ と書いて曖昧性は生じない。成分がすべて 0 である行列をゼロ行列 zero matrix または単にゼロといい、$\mathbf{0}_{m\times n}$ または単に $\mathbf{0}$ であらわす。すると、任意の $\mathbf{A} \equiv \left[a_{ij}\right] \in \mathbf{F}^{m\times n}$ に対して

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

が成立する。この意味で $\mathbf{0}$ は（加法的）単位元（additive）identity と呼ばれる。$-\mathbf{A} \equiv \left[-a_{ij}\right]$ と定義すれば

$$\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = (-\mathbf{A}) + \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

が成立する。$-\mathbf{A}$ を $\mathbf{A}$ の（加法的）逆元(additive) inverse という。$(-\mathbf{A})+\mathbf{B}=\mathbf{B}+(-\mathbf{A})$ を単に $\mathbf{B}-\mathbf{A}$ と書く。

例 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$

1.5　行列のスカラー倍

$k \in \mathbf{F},\ \mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} \in \mathbf{F}^{m\times n}$ に対して $\mathbf{A}$ のスカラー倍 scalar multiple を次のように定義する：

$$k\mathbf{A}=\mathbf{A}k=[ka_{ij}]=[a_{ij}k]\ (i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n)$$

すなわち、$\mathbf{A}$ のスカラー倍（k 倍）とは $\mathbf{A}$ の各成分を k 倍して得られる行列を表す。次の計算則が成り立つことは明らかである：

(1) 分配則 distributive law　$k(\mathbf{A}+\mathbf{B})=k\mathbf{A}+k\mathbf{B},\ (k+l)\mathbf{A}=k\mathbf{A}+l\mathbf{A}$

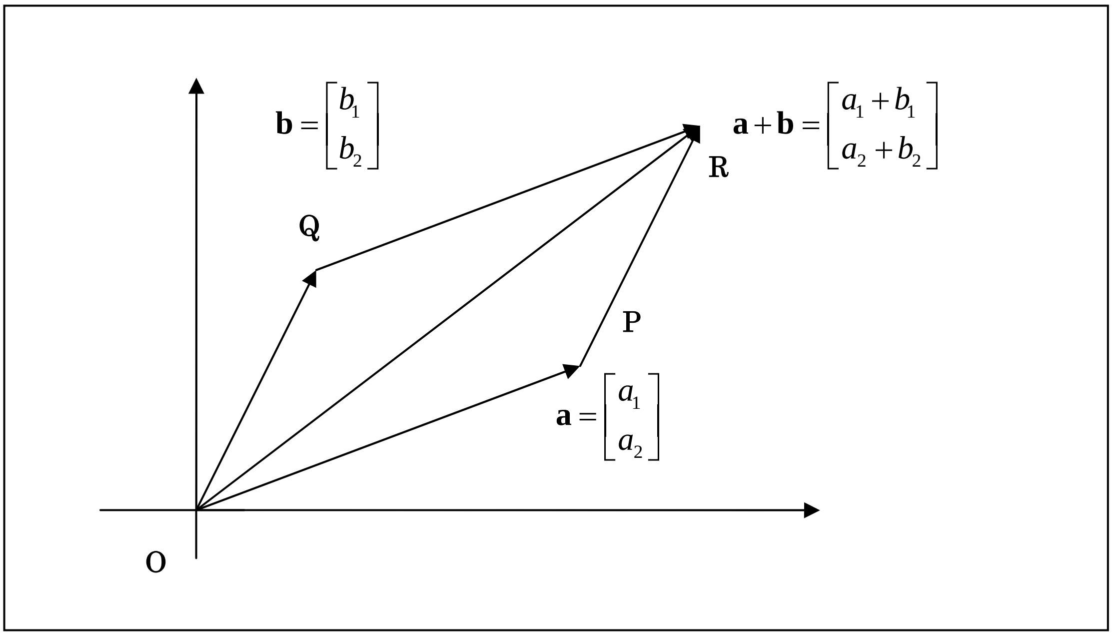
(2) 結合則 associative law　$k(\mathbf{AB})=(k\mathbf{A})\mathbf{B}=\mathbf{A}(k\mathbf{B}),\ (kl)\mathbf{A}=k(l\mathbf{A})$

(3) その他の性質　$1\mathbf{A}=\mathbf{A}$、$-\mathbf{A}=(-1)\mathbf{A}$、$0\mathbf{A}=\mathbf{0}$

例１ $k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$、$(-1)\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (-1)a \\ (-1)b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix}$

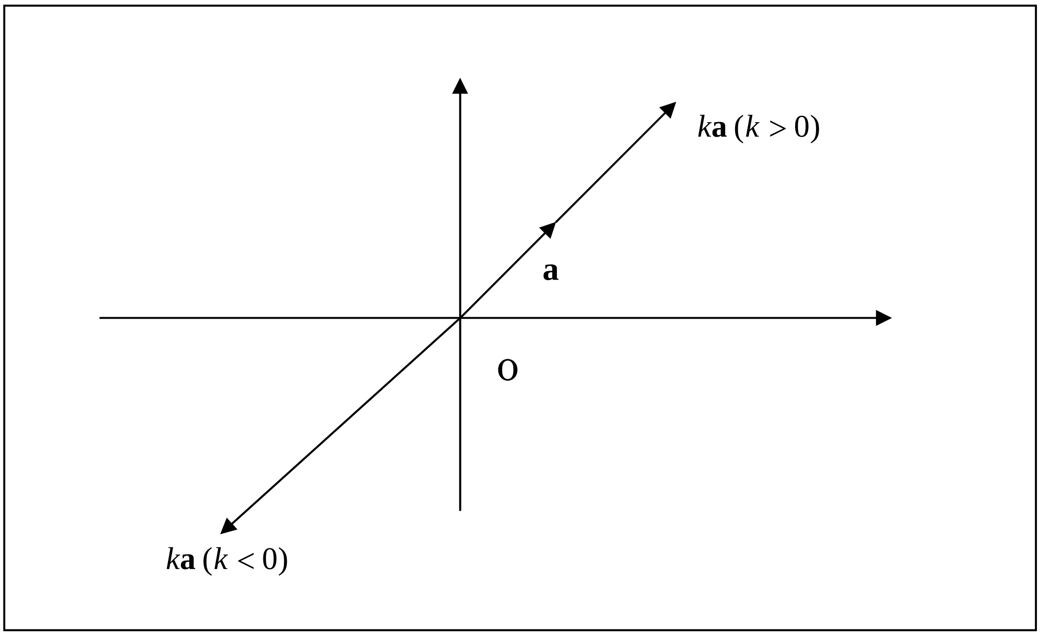
例２　平面上に直交座標系をとり、任意の実２次列ベクトルとの１対１対応関係を考える：

$\mathbf{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$ 点 $\mathrm{P}(a_1,a_2) \Leftrightarrow$ 原点から点 $\mathrm{P}(a_1,a_2)$ に向かって引いた矢線ベクトル $\overrightarrow{OP}$（下図参照）



二つの列ベクトル $\mathbf{a}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$、$\mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ の和 $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\begin{bmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{bmatrix}$ を表す点は点 P より右に b_1 だけ、上に b_2 だけ移動した点だから平行四辺形 OPRQ の対角線 $\overrightarrow{OR}$ で表される。これを平行四辺形の法則 parallelogram law という。また、$\overrightarrow{OR}$ は三角形 OPR の第三の辺でもあるから（$\overrightarrow{OQ}$ と $\overrightarrow{PR}$ は平行移動により一致するから $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{PR}$ と見做して）、三角形の法則 triangle law ともいう。

スカラー倍 $k\mathbf{a}$ $(k>0)$ は $\mathbf{a}$ をその向きの方向に k 倍した矢線ベクトルに対応し、$k<0$ の場合は反対側に k 倍した矢線ベクトルに対応する（下図参照）：



1.6　積

積(matrix) product は行列演算の華である。積 **AB** は条件「**A** の列数＝**B** の行数」が満たされる場合にのみ定義される。このとき **AB** は可積である conformable, well-defined という。すなわち、

(1)　$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11}\cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\cdots\cdots a_{mn} \end{bmatrix}: m\times n$ 行列、　$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} b_{11}\cdots\cdots b_{1p} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}\cdots\cdots b_{np} \end{bmatrix}: n\times p$ 行列

は可積条件を満たし（**A** の列数＝n＝**B** の行数)、積 $\mathbf{AB}\equiv\mathbf{C}$ の (i, j) 成分 c_{ij} は **A** の第 i 行と **B** の第 j 列のみによって決定される次式で定義される：

(2)　$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\quad (i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,p)$$

(3)　$$\mathbf{C}=\mathbf{AB}=\begin{bmatrix} c_{11}\cdots\cdots c_{1p} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{m1}\cdots\cdots c_{mp} \end{bmatrix}: m\times p \text{ 行列}$$

積 **AB** を作ることを乗算 multiplication といい、**A** に右から **B** を掛けるまたは乗じる、または **B** に左から **A** を掛けるまたは乗じる、といういい方もする。型の変化に注目すると、$(m\times n)(n\times p)=(m\times p)$ という、一種の尻取り式の関係が成立することを忘れてはいけない。また積の型は n とは無関係である点にも注意。

(4)　$\mathbf{A}$ の第 i 行 $=[a_{i1},\cdots,a_{in}]$ ：$1\times n$ 行列、　$\mathbf{B}$ の第 j 列 $=\begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$ ：$n\times 1$ 行列

だから（$\mathbf{A}$ の第 i 行）（$\mathbf{B}$ の第 j 列）は行列積として可積であり、結果は

(5)　$[a_{i1},\cdots,a_{in}]\begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}=[a_{i1}b_{1j}+\cdots+a_{in}b_{nj}]=[c_{ij}]$ ：1×1 行列

すなわち、「積 $\mathbf{AB}$ の (i,j) 成分は $\mathbf{A}$ の第 i 行と $\mathbf{B}$ の第 j 列の行列積に等しい」。これを英語では”row-by-column rule”という。この意味で、行列積は、文字通り、行と列の積からできている。すなわち、$\mathbf{A}$ を行単位に分割し、$\mathbf{B}$ を列単位に分割して

(6)　$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^m \end{bmatrix}$ ：$m\times n$ （$\mathbf{a}^1:1\times n$ は第 1 行、$\cdots$）、$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_p \end{bmatrix}$ ：$n\times p$ （$\mathbf{b}_1:n\times 1$ は第 1 列、$\cdots$）

と書けば、積の定義から次式が成立する：

(7)　$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_p \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{a}^1\mathbf{b}_1 \cdots\cdots \mathbf{a}^1\mathbf{b}_p \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{a}^m\mathbf{b}_1 \cdots\cdots \mathbf{a}^m\mathbf{b}_p \end{bmatrix}$ ：$m\times p$

類似の考えから、

(8)　$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^m \end{bmatrix}\mathbf{B}=\begin{bmatrix} \mathbf{a}^1\mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^m\mathbf{B} \end{bmatrix}$ ：$m\times p$

(9)　$\mathbf{AB}=\mathbf{A}\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_p \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{Ab}_1 \cdots \mathbf{Ab}_p \end{bmatrix}$ ：$m\times p$

も明らかであろう。以上 3 種の表現は今後もよく使う。特別の場合として

(10)　$\mathbf{yA}=\begin{bmatrix} y_1 \cdots y_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^m \end{bmatrix}=y_1\mathbf{a}^1+\cdots+y_m\mathbf{a}^m$

(11)　$\mathbf{Ax}=\left[\mathbf{a}_1\cdots\mathbf{a}_n\right]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\mathbf{a}_1x_1+\cdots+\mathbf{a}_nx_n=x_1\mathbf{a}_1+\cdots+x_n\mathbf{a}_n$

一般に、$\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{B}+\cdots+\gamma\mathbf{C}$ 型の行列を行列 $\mathbf{A},\mathbf{B},\cdots,\mathbf{C}$ の一次結合 linear combination と呼ぶ習慣に従うと、上の 2 式は「行ベクトルの一次結合は $\mathbf{yA}$ の形に書け、列ベクトルの一次結合は $\mathbf{Ax}$ の形に書ける」ことを示す。

例１ 積の型のみを考える。以下、行列の成分を単に“x”印で示す。

(1)　$\begin{bmatrix}x & x & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ x\\ x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\end{bmatrix}$

(2)　$\begin{bmatrix}x\\ x\\ x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & x & x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & x & x\\ x & x & x\\ x & x & x\end{bmatrix}$

(3)　$\begin{bmatrix}x & x & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & x & x & x\\ x & x & x & x\\ x & x & x & x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & x & x & x\end{bmatrix}$　（$\begin{bmatrix}x & x & x & x\\ x & x & x & x\\ x & x & x & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & x & x\end{bmatrix}$は可積でない）

(4)　$\begin{bmatrix}x & x\\ x & x\\ x & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ x\\ x\end{bmatrix}$、（$\begin{bmatrix}x\\ x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & x\\ x & x\\ x & x\end{bmatrix}$は可積でない）

(5)　$\begin{bmatrix}x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & x & x & x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & x & x & x\end{bmatrix}$　（$\begin{bmatrix}x & x & x & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\end{bmatrix}$は可積でない）

(6)　$\begin{bmatrix}x\\ x\\ x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ x\\ x\end{bmatrix}$　（$\begin{bmatrix}x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ x\\ x\end{bmatrix}$は可積でない）

(7)　$\begin{bmatrix}x & x & x\\ x & x & x\\ x & x & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & x\\ x & x\\ x & x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & x\\ x & x\\ x & x\end{bmatrix}$　（$\begin{bmatrix}x & x\\ x & x\\ x & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & x & x\\ x & x & x\\ x & x & x\end{bmatrix}$は可積でない）

例２　積の例“row-by-column rule”（「積の $(i,\,j)$ 成分は第 i 行と第 j 列の積」）を使う。

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

この 2 例から、一般に $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$。すなわち、行列積は一般に可換ではないことがわかる。また、$\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ はかならずしも $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ または $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ を意味しないこともわかる。実数体、複素数体に対して成立する「$xy = 0$ なら $x = 0$ または $y = 0$」は行列に対しては成り立たない！

例 3　1.1 節で見た梁にかかる荷重 f_1, f_2, f_3 とたわみ y_1, y_2 の関係式

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11} f_1 + a_{12} f_2 + a_{13} f_3 \\ y_2 &= a_{21} f_1 + a_{22} f_2 + a_{23} f_3 \end{aligned} \quad \text{はまとめて行列形で} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \mathbf{Af}$$

と書ける。一般に

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{aligned} \quad \text{型の関係式は行列形で} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{m1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} \cdots a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \mathbf{Ax}$$

と簡潔に書ける。これは線形代数の主たる考察対象である線形変換の代表例を表す。

例 4　$\mathbf{e}_1^{(n)} = [10\cdots0]^T, \mathbf{e}_2^{(n)} = [010\cdots0]^T, \cdots \mathbf{e}_n^{(n)} = [0\cdots01]^T$：$n \times 1$ のそれぞれを n 次単位列ベクトル unit column vector という。ここに n は任意の自然数を表す。とくに、$\mathbf{e}_j^{(n)}$ を n 次第 j 単位列ベクトルという（$j = 1, \cdots, n$）。すると、任意の $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbf{F}^{m \times n}$ に対して、

$$\mathbf{Ae}_j^{(n)} = \mathbf{A} \text{ の第 } j \text{ 列（} j = 1, \cdots, n \text{）、} \qquad \mathbf{e}_i^{(m)T}\mathbf{A} = \mathbf{A} \text{ の第 } i \text{ 行（} i = 1, \cdots, m \text{）}$$

この 2 式は、行列の指定された行、列を取り出す操作は適当な単位ベクトルを左または右から掛ければよいことを示す。これはぜひ記憶して頂きたい事実である。

例 5　行による展開、列による展開

$$[y_1\ y_2\ y_3]\begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33} \end{bmatrix} = [y_1][a_{11}\ a_{12}\ a_{13}] + [y_2][a_{21}\ a_{22}\ a_{23}] + [y_3][a_{31}\ a_{32}\ a_{33}]$$

$$= y_1[a_{11}\ a_{12}\ a_{13}] + y_2[a_{21}\ a_{22}\ a_{23}] + y_3[a_{31}\ a_{32}\ a_{33}]$$ （行の一次結合）

$$\begin{bmatrix} a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}[x_1] + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix}[x_2] + \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}[x_3] = x_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}$$ （列の一次結合）

1.7　積の単位元

次式で定義される対角行列を m 次単位行列 identity matrix という：

$$\mathbf{I}_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 1 \cdots & 0 \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ 0 & 0 \cdots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{F}^{m\times m}, m = 1, 2, \cdots$$

すると、

任意の　$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdots\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} \cdots\cdots a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbf{F}^{m\times n}$　に対して　$\mathbf{I}_m\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{A}$

が成り立つ（$m \neq n$ なら、左右の単位行列は同じ型でないことに注意）。すなわち、単位行列は積の単位元 multiplicative unit を表し、体における1と同じ役割を果たす。

1.8　分配則

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC},\ (\mathbf{D}+\mathbf{E})\mathbf{F} = \mathbf{DF}+\mathbf{EF}$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}+\cdots\mathbf{D}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}+\cdots+\mathbf{AD},$$
$$(\mathbf{D}+\mathbf{E}+\cdots+\mathbf{F})\mathbf{G} = \mathbf{DG}+\mathbf{EG}+\cdots+\mathbf{FG}$$

ただし、それぞれの行列和は同型の行列の和を表し、行列積は可積条件を満たしているものとする。証明は定義に照らせば簡単なので省略する。以上を分配則 distributive law という。

1.9　積の結合則と拡大結合則

結合則 associative law　任意の $\mathbf{A} \in \mathbf{F}^{m\times n}, \mathbf{B} \in \mathbf{F}^{n\times p}, \mathbf{C} \in \mathbf{F}^{p\times q}$ に対して、$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$ が成り立つ。この共通の積を単に $\mathbf{ABC}$ と書く。

証明　両辺の対応する成分が相等しいことを、積の定義に照らして丁寧に検証するのも一法だが、ここでは対応する列が相等しいことを示す。まず、

(1)　$\mathbf{A}: m\times n, \mathbf{B}: n\times p, \mathbf{C}: p\times q, \mathbf{AB}: m\times p, (\mathbf{AB})\mathbf{C}: m\times q, \mathbf{BC}: n\times q, \mathbf{A}(\mathbf{BC}): m\times q$

ゆえに、$\mathbf{X}\equiv(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ と $\mathbf{Y}\equiv\mathbf{A}(\mathbf{BC})$　はどちらも $m\times q$ 型の行列を表す。$\mathbf{X}=\mathbf{Y}$ を示す。

$\mathbf{C}$ の第 j 列を $\mathbf{c}_j$ と書けば（$j=1,\cdots,q$）、$\mathbf{X}$ の第 j 列$=(\mathbf{AB})\mathbf{c}_j$、$\mathbf{Y}$ の第 j 列$=\mathbf{A}(\mathbf{BC}$ の第 j 列$)=\mathbf{A}(\mathbf{Bc}_j)$ だから、

(2)　$(\mathbf{AB})\mathbf{c}_j=\mathbf{A}(\mathbf{Bc}_j),\ j=1,\cdots,q$

を示せば十分である。これを示すには、任意の $\mathbf{x}\in\mathbf{F}^{p\times1}$ に対して

(3)　$(\mathbf{AB})\mathbf{x}=\mathbf{A}(\mathbf{Bx})$

を示せば十分である。この式は「２段階の変換 $\mathbf{x}\to\mathbf{Bx}\to\mathbf{A}(\mathbf{Bx})$ は単一の変換 $\mathbf{x}\to(\mathbf{AB})\mathbf{x}$ に等しい」、すなわち、「積 $\mathbf{AB}$ とは<u>合成変換</u> composite transformation である」との主張に他ならない。

(3)を示す。$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\end{bmatrix}\in\mathbf{F}^{p\times1}$ は、p 次単位ベクトル $\mathbf{e}_1{}^{(p)},\cdots,\mathbf{e}_p{}^{(p)}$ を使って一次結合

$\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1{}^{(p)}+\cdots+x_p\mathbf{e}_p{}^{(p)}$ の形に展開できる。これを(3)に代入すると、分配則により

(4)　$x_1(\mathbf{AB})\mathbf{e}_1{}^{(p)}+\cdots+x_p(\mathbf{AB})\mathbf{e}_p{}^{(p)}=x_1\mathbf{A}(\mathbf{Be}_1{}^{(p)})+\cdots+x_p\mathbf{A}(\mathbf{Be}_p{}^{(p)})$

がとなる。これを見ると、(3)がすべての $\mathbf{x}\in\mathbf{F}^{p\times1}$ に対して成立することを示すには

(5)　$(\mathbf{AB})\mathbf{e}_j=\mathbf{A}(\mathbf{Be}_j),\ j=1,\cdots,p$

を示せば十分である。ところが(5)の左辺は積 $\mathbf{AB}$ の第 j 列を表し、右辺は積 $\mathbf{A}(\mathbf{B}$ の第 j 列）を表す。すなわち、(5)の主張は

(6)　積 $\mathbf{AB}$ の第 j 列＝$\mathbf{A}(\mathbf{B}$ の第 j 列）　$j=1,\cdots,p$

と同値である。これは積の定義から明らかに正しい。■

<u>拡大結合則</u> extended associative law　行列 $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\cdots,\mathbf{D}$ の積 $\mathbf{ABC}\cdots\mathbf{D}$ はこの順序さえ守れば積を実行する順には無関係な行列を表す。ゆえに、正方行列 $\mathbf{A}$ の k 乗 $\mathbf{A}^k=\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}$ （k 個の $\mathbf{A}$ の積、$k=1,2,\cdots$）も曖昧性なく定義できる。$k=0$ の場合は $\mathbf{A}^0=\mathbf{I}$ と規約する。

証明　例で説明しよう。行列４個の場合、可能な計算順序は $(\mathbf{ABC})\mathbf{D},(\mathbf{AB})(\mathbf{CD}),\mathbf{A}(\mathbf{BCD})$ 型の４個である。ここに３個の行列の積が計算順序に無関係なことは結合則の主張そのものである。結合則を繰り返し利用すればこのタイプのいずれもが最初から順に実行した積 $((\mathbf{AB})\mathbf{C})\mathbf{D}$

と等しくなる。一般的には数学的帰納法によるのがよい。■

1.10 逆行列

この節では正方行列のみを問題にする。与えられた $\mathbf{A} \in \mathbf{F}^{m \times m}$ に対して $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$ を満たす $\mathbf{B} \in \mathbf{F}^{m \times m}$ が存在すれば、$\mathbf{B}$ を $\mathbf{A}$ の逆行列 inverse (matrix)という。このとき、$\mathbf{A}$ は可逆 invertible または正則 regular, nonsingular という。

逆行列は存在すれば一つしかない。実際、$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$ 、$\mathbf{AC} = \mathbf{CA} = \mathbf{I}$ なら、$\mathbf{B} = \mathbf{BI} = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) = (\mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{IC} = \mathbf{C}$。

定義式 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}$ の対称性から、$\mathbf{A}, \mathbf{B}$ は互いの逆行列である。$\mathbf{A}$ の逆行列を $\mathbf{A}^{-1}$ と記す。ゆえに $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$、$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{A}$。ゆえにまた、$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$ が成り立つ。

後ほど示すように「正方行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ に対しては $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ ならかならず $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ も成り立つ」から、定義式の要請「$\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ かつ $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$」はどちらか一つでよい（レッスン５　同値分解と LDU 分解 Part II)。

また、実行列の逆行列は実行列である。すなわち、実行列 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times m}$ を複素行列と考え、その逆行列を考えると、それはかならず実行列となる。実際、$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{X} + i\mathbf{Y}$ （$\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ は実行列）とすれば、$\mathbf{A}(\mathbf{X} + i\mathbf{Y}) = (\mathbf{X} + i\mathbf{Y})\mathbf{A} = \mathbf{I}$。両辺の実部と虚部を比較すると、$\mathbf{AX} = \mathbf{XA} = \mathbf{I},\ \mathbf{AY} = \mathbf{YA} = \mathbf{0}$ が得られる。すると $\mathbf{0} = \mathbf{X}(\mathbf{AY}) = (\mathbf{XA})\mathbf{Y} = \mathbf{IY} = \mathbf{Y}$。

例１　単位行列の逆行列はそれ自身である：$\mathbf{I}\,\mathbf{I} = \mathbf{I}$

例２　２次行列 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の逆行列。直接計算により

(*) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (ad - bc)\mathbf{I}$。ゆえに $ad - bc \neq 0$ なら、

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$。他方、$ad - bc = 0$ なら、逆行列は存在しない。なんとなれば、

仮に $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}$ が存在したとすれば、(*)式より $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \mathbf{0}$。これは $a = b = c = d = 0$ をいみする。ゆえに $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \mathbf{0}$。$\mathbf{0}$ の逆行列は存在しえないから、これは矛盾である。

例３　$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　(検算されよ)

例4　対角行列の逆行列について次の事実が成り立つ：n 次対角行列 $\mathbf{D}=\begin{bmatrix} d_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & d_n \end{bmatrix}$ の逆行列が存在する $\leftrightarrow$ $\mathbf{DX}=\mathbf{I}$ または $\mathbf{YD}=\mathbf{I}$ のどちらかを満たす n 次行列 $\mathbf{X}$ または $\mathbf{Y}$ が存在する $\leftrightarrow d_i \neq 0\ (i=1,\cdots,n)$。そして $\mathbf{D}^{-1}$ が存在すれば　$\mathbf{D}^{-1}=\begin{bmatrix} d_1^{-1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & d_n^{-1} \end{bmatrix}$。

実際、$\mathbf{DX}=\mathbf{I}$、$\mathbf{X}=\left[x_{ij}\right]$ とすれば、$d_i x_{ij}=1(i=j), 0(i\neq j)$。これより $d_i \neq 0, x_{ii}=1/d_i(i=1,\cdots,n)$、$x_{ij}=0(i\neq j)$。すると直接計算により $\mathbf{XD}=\mathbf{I}$ も成り立つことがわかる。これより $\mathbf{D}^{-1}=\begin{bmatrix} d_1^{-1} & \cdots & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & d_n^{-1} \end{bmatrix}$。他の主張についても同様の方法で検証できる。

1.11　積の逆行列は逆行列の逆順の積

$\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbf{F}^{m\times m}$ が可逆行列なら、$(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ が成り立つ。$\mathbf{A},\mathbf{B},\cdots,\mathbf{C}\in\mathbf{F}^{m\times m}$ が可逆行列なら、$(\mathbf{AB}\cdots\mathbf{C})^{-1}=\mathbf{C}^{-1}\cdots\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ が成り立つ。

証明　$(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})=\mathbf{I},\ (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{AB})=\mathbf{I}$ を検証すればよい。■

実は、逆も真である。ただし、これを示すには、レッスン 5 で示す「正方行列 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ に対しては、$\mathbf{AB}=\mathbf{I}$ ならかならず $\mathbf{BA}=\mathbf{I}$」を使う必要がある。実際、これを受け入れると、$(\mathbf{AB})^{-1}$ の存在⇒$\mathbf{I}=(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{A}\{\mathbf{B}(\mathbf{AB})^{-1}\}\Rightarrow\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{B}(\mathbf{AB})^{-1}$、そして
$\mathbf{I}=(\mathbf{AB})^{-1}(\mathbf{AB})=\{(\mathbf{AB})^{-1}\mathbf{A}\}\mathbf{B}\Rightarrow\mathbf{B}^{-1}=(\mathbf{AB})^{-1}\mathbf{A}$。この論法を繰り返し適用すれば、
$(\mathbf{AB}\cdots\mathbf{C})^{-1}$ の存在は $\mathbf{A}^{-1},\mathbf{B}^{-1},\cdots,\mathbf{C}^{-1}$ の存在を意味することがわかる。

1.12　転置

$\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]\in\mathbf{F}^{m\times n}$ の (i,j) 成分を (j,i) の位置に移して得られる行列を $\mathbf{A}$ の<u>転置行列</u> transpose といい、$\mathbf{A}^T$ で表す $(i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n)$。転置を取れば a_{ij} の位置は $(i,j)\rightarrow(j,i)$ となり（$i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n$）、型も変化する：$\mathbf{A}:m\times n\rightarrow\mathbf{A}^T:n\times m$
転置を 2 度取れば a_{ij} の位置は $(i,j)\rightarrow(j,i)\rightarrow(i,j)$ となって元に還る。すなわち、$\mathbf{A}^{TT}=\mathbf{A}$

（回帰性）。転置を取とっても不変な行列、すなわち、$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ を満たす $\mathbf{A}$ 、を対称行列 symmetric matrix という。対称行列は当然正方行列でなければならない。対称行列の成分は主対角線に関して対称に配置されている。

例１　$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 11 & 12 \end{bmatrix}$ なら、$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \end{bmatrix}$、$\mathbf{A}^{TT} = \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 11 & 12 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$、

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{bmatrix}$ なら、$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 11 & 21 \\ 12 & 22 \end{bmatrix}$、$\mathbf{A}^{TT} = \begin{bmatrix} 11 & 21 \\ 12 & 22 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{bmatrix} = \mathbf{A}$

この行列は対称行列である。また

$$[a_1, a_2, \cdots, a_n]^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}、\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}^T = [a_1, a_2, \cdots, a_n]$$

転置演算を利用してスペース節約のため、今後 $\begin{bmatrix} a \\ b \\ \vdots \end{bmatrix}$ を $\begin{bmatrix} a & b & \cdots \end{bmatrix}^T$ と書くことがある。

例２　$m \times n$ 行列 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ を行に分割し（または区分けする）to partition、第 i 行を

$\mathbf{a}^i \equiv [a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}] : 1 \times n$ と書くと、$\mathbf{A}$ は次のように書ける：

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots\cdots a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^m \end{bmatrix}$$

転置を取ると、

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^m \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} (\mathbf{a}^1)^T & (\mathbf{a}^2)^T \cdots & (\mathbf{a}^m)^T \end{bmatrix} \quad （\mathbf{a}^i : 1 \times n、(\mathbf{a}^i)^T : n \times 1、i = 1, \cdots, m）$$

すなわち、一般に

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \vdots \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^T & \mathbf{b}^T & \cdots \end{bmatrix}^T$$ ：$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \cdots$ を数と思って転置を取った後、それぞれの転置をとる

たとえば、

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$（行に分割）と考えれば、$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^T & \mathbf{b}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 21 \\ 12 & 22 \\ 13 & 23 \end{bmatrix}$

今度は $\mathbf{A}$ を列に分割し第 j 列を $\mathbf{a}_j$ と書けば、

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1{}^T \\ \mathbf{a}_2{}^T \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n{}^T \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a}^j : m \times 1, \quad (\mathbf{a}^j)^T : 1 \times m \ (j = 1, \cdots, n)$$

すなわち、一般に

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \cdots \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^T \\ \mathbf{b}^T \\ \vdots \end{bmatrix}$$ ：$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \cdots$ を数と思って転置を取った後、それぞれの転置をとる

たとえば、

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{bmatrix}$（列に分割）と考えれば、$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^T \\ \mathbf{b}^T \\ \mathbf{c}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 21 \\ 12 & 22 \\ 13 & 23 \end{bmatrix}$

1.13　和、スカラー倍、積の転置

以下 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \cdots$ はすべて与えられた体 $\mathbf{F}$ 上の行列、α をスカラー（$\mathbf{F}$ の元）とする。

(1) $(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \cdots + \mathbf{C})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T + \cdots + \mathbf{C}^T$

(2) $(\alpha \mathbf{A})^T = \alpha \mathbf{A}^T$

(3) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$

(4) $(\mathbf{AB} \cdots \mathbf{C})^T = \mathbf{C}^T \cdots \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$

ここに(1)では $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \cdots, \mathbf{C}$ はすべて同じ型の行列、(2)、(3)では可積条件が満たされているとしている。積の転置は転置の逆順の積である点に注意。

証明　(1)、(2)の証明は簡単なので省略。(3)の証明：可積条件から $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ はそれぞれ $m \times n$ 型、$n \times p$ 型でなければならない。すると　$\mathbf{AB} : m \times p \Rightarrow (\mathbf{AB})^T : p \times m$、$\mathbf{B}^T : p \times n,\ \mathbf{A}^T : n \times m \Rightarrow$

$\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T : p\times m$ となって、(2)の両辺の型は一致する。残るは対応する成分の相等の確認である。$\mathbf{A},\mathbf{B}$ をそれぞれ行、列に分割し、

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{a}^1\\ \vdots\\ \mathbf{a}^m\end{bmatrix}(\mathbf{a}_i:1\times n,\ i=1,\cdots,m),\ \ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1\cdots\mathbf{b}_p\end{bmatrix}(\mathbf{b}_j:n\times 1,\ j=1,\cdots,p)$$

と書く。記号 $(\mathbf{X})_{ij}$ で行列 $\mathbf{X}$ の (i,j) 成分を表すものとし、(2)の両辺の (i,j) 成分を計算すると

左辺：$(\mathbf{AB})^T{}_{ji}=(\mathbf{AB})_{ij}=\mathbf{a}^i\mathbf{b}_j, i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,p$

右辺：$(\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T)_{ji}=$（$\mathbf{B}^T$ の第 j 行）（$\mathbf{A}^T$ の第 i 列）$=\mathbf{b}_j{}^T(\mathbf{a}^i)^T\overset{*}{=}\mathbf{a}^i\mathbf{b}_j, i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,p$

ここに＊印の相等は直接計算による。これで(2)式両辺の対応する成分の相等が証明された。
(4)の証明：(3)を繰り返し適用すればよい。例：$(\mathbf{ABC})^T=\mathbf{C}^T(\mathbf{AB})^T=\mathbf{C}^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$。■

1.14　共役と共役転置

この項では複素行列のみを考える（実行列は複素行列の特別の場合である）。

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{ij}\end{bmatrix}\in\mathbf{C}^{m\times n}$ の各成分をその共役複素数で置き換えて得られる行列を $\mathbf{A}$ の<u>共役</u> complex conjugate といい $\overline{\mathbf{A}}$ で表す。ゆえに、$\overline{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix}\overline{a_{ij}}\end{bmatrix}$。また共役と転置を続けて行った行列を<u>共役転置</u> conjugate transpose といい $\mathbf{A}^*$ で表す。ゆえに、$\mathbf{A}^*=\overline{\mathbf{A}}^T=\begin{bmatrix}\overline{a_{ji}}\end{bmatrix}=\overline{\mathbf{A}^T}$（共役と転置の順序はどちらを先にしても同じ）。

例　複素数 $z=a+ib$（a,b は実数、$i^2=-1$）の共役複素数とは $\overline{z}=a+i(-b)=a-ib$ のことだから、

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1+i & 1-3i\\ i & 0 & -1\end{bmatrix}\ \text{なら}\ \ \overline{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix}1 & 1-i & 1+3i\\ -i & 0 & -1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{A}^*=\overline{\mathbf{A}}^T=\begin{bmatrix}1 & -i\\ 1-i & 0\\ 1+3i & -1\end{bmatrix}$$

1.15　和、スカラー倍、積の共役、共役転置

複素行列のみが考察の対象である。以下 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ を複素行列とする。

(1)　$\overline{\mathbf{A}+\mathbf{B}}=\overline{\mathbf{A}}+\overline{\mathbf{B}}$、　$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^*=\mathbf{A}^*+\mathbf{B}^*$

(2)　$\overline{\alpha\mathbf{A}}=\overline{\alpha}\overline{\mathbf{A}}$、 $(\alpha\mathbf{A})^*=\overline{\alpha}\mathbf{A}^*$

(3)　$\overline{\mathbf{AB}}=\overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{B}}$、$(\mathbf{AB})^*=\mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$

証明　(1)(2)と(3)の前半は複素数の性質 $\overline{u+v}=\overline{u}+\overline{v},\ \overline{uv}=\overline{u}\overline{v}$ （u,v は複素数）から出る。(3)後半の証明には既出の公式 $(\mathbf{AB})^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ において両辺の共役をとり(3)の前半を適用する。■

例

$$\overline{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}}=\overline{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}\ \overline{\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}}=\begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{w} & \overline{x} \\ \overline{y} & \overline{z} \end{bmatrix}$$

$$(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix})^*=\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}^*\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^*=\begin{bmatrix} \overline{w} & \overline{y} \\ \overline{x} & \overline{z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{bmatrix}$$

1.16　ブロック行列

与えられた $m\times n$ 行列 $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]$ の指定された行（第 $i_1,\cdots,i_k$ 行とする）と指定された列（第 $j_1,\cdots,j_l$ 列とする）の交差する位置にある成分をそのまま読み出してできる $k\times l$ 行列をこれらの行および列で決定される<u>小行列</u> submatrix という。連続する行または列で決定される小行列を<u>ブロック</u> block という。ブロックに分割された行列を<u>区分けされた行列</u> partitioned matrix または<u>ブロック行列</u> block matrix という。元の行列自体もブロックの特別の場合と考える。

例：

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ を与えられた 3×3 行列とする。

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$：第 1,2 行、第 1,2 列で決定される小行列またはブロック、または左上 2×2 小行列またはブロック、または 2 次<u>主座小行列</u> principal submatrix

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$：第 1,3 行と第 1,2 列で決定される小行列（この場合、ブロックとはふつういわない）

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{23} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & \vdots & a_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}$$
：区分けされた行列またはブロック行列

ここに　$\mathbf{A}_{11}:2\times 2,\ \mathbf{A}_{12}:2\times 1,\ \mathbf{A}_{21}:1\times 2,\ \mathbf{A}_{22}:1\times 1$

1.17　ブロック行列の積

いま、可積条件を満たす行列$\mathbf{A}:m\times n, \mathbf{B}:n\times p$が与えられたとし、$\mathbf{A},\mathbf{B}$を可積的にブロック化するまたは分割する to conformably partition ものとする：すなわち、$\mathbf{A},\mathbf{B}$を以下の条件(1)、(2)を満たすように

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}\cdots\mathbf{A}_{1l} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{A}_{k1}\cdots\mathbf{A}_{kl} \end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}\cdots\mathbf{B}_{1p} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{B}_{l1}\cdots\mathbf{B}_{lp} \end{bmatrix}$$

型に分割するものとする。ここに

(1)（ブロック行列としての）$\mathbf{A}$の列数＝l＝（ブロック行列としての）$\mathbf{B}$の行数

（各ブロックがすべて1×1ならこれが積$\mathbf{AB}$を定義できる可積条件である）

(2)　$\mathbf{A}$の任意かつ特定の行$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{i1}\cdots\mathbf{A}_{il} \end{bmatrix}$と$\mathbf{B}$の任意かつ特定の列$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1j} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{lj} \end{bmatrix}$との積

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{i1}\cdots\mathbf{A}_{il} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1j} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{lj} \end{bmatrix}=\mathbf{A}_{i1}\mathbf{B}_{1j}+\cdots+\mathbf{A}_{il}\mathbf{B}_{lj}\equiv\mathbf{C}_{ij}$$
が定義できる（すなわち、積

$\mathbf{A}_{i1}\mathbf{B}_{1j},\cdots,\mathbf{A}_{il}\mathbf{B}_{lj}$がすべて可積である）

以上の２条件が満たされるなら、次の積の公式が成立する：

(3)　$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ij} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11}\cdots\mathbf{C}_{1p} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{C}_{k1}\cdots\mathbf{C}_{kp} \end{bmatrix}\equiv\mathbf{C}$$

別のいい方をすれば、公式(3)が成立するかどうかを見るには、ブロック成分$\mathbf{C}_{11},\cdots,\mathbf{C}_{lp}$のどれか一個だけについて計算可能かどうかチェックすればよい。

証明は $\mathbf{A},\mathbf{B}$ の各ブロックの型を指定し、(3)から計算した $\mathbf{AB}$ の (r,s) 成分が通常の定義式から計算した (r,s) 成分に等しいことを検証すればよい（$r=1,\cdots,m, s=1,\cdots,p$）。単純なチェックだが、文字使いがやや煩雑化する。詳細はラーナーにお任せする。

例１　$\mathbf{A}:m\times n$ を行に分割し、$\mathbf{B}:n\times p$ を列に分割し

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{a}^1\\ \vdots\\ \mathbf{a}^m\end{bmatrix}$$（$\mathbf{a}^1:1\times n$ は第１行、…）、$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1\cdots\mathbf{b}_p\end{bmatrix}$（$\mathbf{b}_1:n\times 1$ は第１列、…）

と書けば

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}\mathbf{a}^1\\ \vdots\\ \mathbf{a}^m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1\cdots\mathbf{b}_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{a}^1\mathbf{b}_1\cdots\cdots\mathbf{a}^1\mathbf{b}_p\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \mathbf{a}^m\mathbf{b}_1\cdots\cdots\mathbf{a}^m\mathbf{b}_p\end{bmatrix}$$

説明　中央の積はブロック行列として $(m\times 1)(1\times n)$ 型の積⇒可積条件(1)をクリア、$\mathbf{a}^1\mathbf{b}_1$ は $\mathbf{a}^1:1\times n$、$\mathbf{b}_1:n\times 1$ だから確かに可積⇒可積条件(2)をクリア、$\mathbf{a}^1\mathbf{b}_1$ はいうまでもなく 1×1 行列。他の $\mathbf{a}^i\mathbf{b}_j$ をチェックする必要なく、上式(2)の成立が確かめられる。

例２　$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}\mathbf{a}^1\\ \vdots\\ \mathbf{a}^m\end{bmatrix}\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{a}^1\mathbf{B}\\ \vdots\\ \mathbf{a}^m\mathbf{B}\end{bmatrix}:\ m\times p$$

説明　左から２番目の積はブロック行列として $(m\times 1)(1\times 1)$ 型の積⇒可積条件(1)をクリア、$\mathbf{a}^1\mathbf{B}$ は $\mathbf{a}^1:1\times n$、$\mathbf{B}:n\times p$ だから確かに可積⇒可積条件(2)をクリア、$\mathbf{a}^1\mathbf{B}$ はいうまでもなく $1\times p$ 行列。他の $\mathbf{a}^i\mathbf{B}$ をチェックする必要なく、上式の成立が確かめられる。

例３　$\mathbf{AB}=\mathbf{A}\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1\cdots\mathbf{b}_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{Ab}_1\cdots\mathbf{Ab}_p\end{bmatrix}:\ m\times p$

説明　中央の積はブロック行列として $(1\times 1)(1\times p)$ 型の積⇒可積条件(1)をクリア、$\mathbf{Ab}_1$ は $\mathbf{A}:m\times n$、$\mathbf{b}_1:n\times 1$ だから確かに可積⇒可積条件(2)をクリア、$\mathbf{Ab}_1$ はいうまでもなく $m\times 1$ 行列。他の $\mathbf{Ab}_j$ をチェックする必要なく、上式の成立が確かめられる。

例４　$\mathbf{y}^T\mathbf{A}=\begin{bmatrix}y_1\cdots y_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{a}^1\\ \vdots\\ \mathbf{a}^m\end{bmatrix}=y_1\mathbf{a}^1+\cdots+y_m\mathbf{a}^m=$（$\mathbf{A}$ の行の一次結合、$\mathbf{y}=\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix}\in\mathbf{F}^{m\times 1}$）

説明　中央の積はブロック行列として $(1\times m)(m\times 1)$ 型の積⇒可積条件(1)をクリア、$y_1\mathbf{a}^1$ は $y_1:1\times 1$、$\mathbf{a}^1:1\times n$ だから確かに可積⇒可積条件(2)をクリア、$y_1\mathbf{a}^1$ はいうまでもなく $1\times n$ 行列。他の $y_i\mathbf{a}^i$ をチェックする必要なく、上式の成立が確かめられる。ここに各 $y_i\mathbf{a}^i$ は行列積 $\left[y_i\right]\mathbf{a}^i$ の意味だが、結果的にスカラー倍 $y_i\mathbf{a}^i$ と同一となる点に注意。

例５　$\mathbf{Ax}=\left[\mathbf{a}_1\cdots\mathbf{a}_n\right]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\mathbf{a}_1x_1+\cdots+\mathbf{a}_nx_n=x_1\mathbf{a}_1+\cdots+x_n\mathbf{a}_n=$（$\mathbf{A}$ の列の一次結合）

説明　中央の積はブロック行列として $(1\times n)(n\times 1)$ 型の積⇒可積条件(1)をクリア、$\mathbf{a}_1x_1$ は、$\mathbf{a}_1:m\times 1$、$x_1:1\times 1$ だから確かに可積⇒可積条件(2)をクリア、$\mathbf{a}_1x_1$ はいうまでもなく $m\times 1$ 行列。他の $\mathbf{a}_1x_1$ をチェックする必要なく、上式の成立が確かめられる。ここに各 $\mathbf{a}_ix_i$ は行列積 $\mathbf{a}_i\left[x_i\right]$ の意味だが、結果的にスカラー倍 $x_i\mathbf{a}_i$ と同一となる点に注意。

例６　同じ型の正方行列 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ を、対角ブロックがすべて正方行列であるように、$\mathbf{A},\mathbf{B}$ ともに同一の仕方で分割しよう。すなわち、

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}\cdots\mathbf{A}_{1k}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \mathbf{A}_{k1}\cdots\mathbf{A}_{kk}\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{11}\cdots\mathbf{B}_{1k}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \mathbf{B}_{k1}\cdots\mathbf{B}_{kk}\end{bmatrix}\quad \mathbf{A}_{ii},\mathbf{B}_{ii}\ :\ n_i\times n_i\ \ (i=1,\cdots,k)$$

すると

$$(*)\quad \mathbf{AB}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}\cdots\mathbf{A}_{1k}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \mathbf{A}_{k1}\cdots\mathbf{A}_{kk}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{11}\cdots\mathbf{B}_{1k}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \mathbf{B}_{k1}\cdots\mathbf{B}_{kk}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}_{11}\cdots\mathbf{C}_{1k}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \mathbf{C}_{k1}\cdots\mathbf{C}_{kk}\end{bmatrix}$$

ここに

$$\mathbf{AB}\equiv\mathbf{C}=\left[\mathbf{C}_{ij}\right],\ \mathbf{C}_{ij}=\left[\mathbf{A}_{i1}\cdots\mathbf{A}_{ik}\right]\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{1j}\\ \vdots\\ \mathbf{B}_{kj}\end{bmatrix}=\mathbf{A}_{i1}\mathbf{B}_{1j}+\cdots+\mathbf{A}_{ik}\mathbf{B}_{kj}\ \ (i,j=1,\cdots,k)$$

説明　(*)式中央の積はブロック行列として $(k\times k)(k\times k)$ 型の積⇒条件(1)をクリア、また特定の $\mathbf{C}_{ij}$ について考えると、$\mathbf{A}_{il}:n_i\times n_l,\mathbf{B}_{lj}:n_l\times n_j$（$i,j,l=1,\cdots,k$）ゆえ、各積 $\mathbf{A}_{i1}\mathbf{B}_{1j},\cdots,\mathbf{A}_{il}\mathbf{B}_{lj}$

はすべて可積である⇒条件(2)をクリア、ゆえに計算式（＊）は正しい。特によく使うのは$k=2$の場合の公式：

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{11}\mathbf{B}_{12}\\ \mathbf{B}_{21}\mathbf{B}_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12}+\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22}\\ \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12}+\mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22}\end{bmatrix}$$

である。ここに$\mathbf{A}_{11},\mathbf{A}_{22}$は一般には型の違う正方行列、そして$\mathbf{B}$はまったく$\mathbf{A}$と同一の仕方で分割されているものとしている。

1.18　ブロック行列の転置公式

(1)　$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}\cdots\mathbf{A}_{1l}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \mathbf{A}_{k1}\cdots\mathbf{A}_{kl}\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\mathbf{A}^T=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}{}^T\cdots\mathbf{A}_{k1}{}^T\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \mathbf{A}_{1l}{}^T\cdots\mathbf{A}_{kl}{}^T\end{bmatrix}$

すなわち、$\mathbf{A}^T$を計算するには、$\mathbf{A}$の各ブロックを数と思って全体の転置を取った後に各ブロックの転置をとればよい。ゆえに、$\mathbf{A}$の(i,j)ブロックの転置が$\mathbf{A}^T$の(j,i)ブロックとなる。

証明　簡単だが馬鹿にしてもいけない。転置に関するこれまでの結果から

(2)　$\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}\\ \vdots\\ \mathbf{A}_{k1}\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}{}^T\cdots\ \mathbf{A}_{k1}{}^T\end{bmatrix},\ \ \begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}\cdots\mathbf{A}_{1l}\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}{}^T\\ \vdots\\ \mathbf{A}_{1l}{}^T\end{bmatrix}$

は明らか。一般の場合(1)は上の公式を２段階に分けて適用すればよい。■

例　$\begin{bmatrix}\mathbf{U}&\mathbf{V}&\mathbf{W}\\ \mathbf{X}&\mathbf{Y}&\mathbf{Z}\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}\mathbf{U}^T&\mathbf{X}^T\\ \mathbf{V}^T&\mathbf{Y}^T\\ \mathbf{W}^T&\mathbf{Z}^T\end{bmatrix}$

1.19　ブロック行列の和とスカラー倍

まったく同一の仕方で分割されたブロック行列の和、任意のブロック行列のスカラー倍の計算法は自明である。すなわち、

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}\cdots\mathbf{A}_{1l}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \mathbf{A}_{k1}\cdots\mathbf{A}_{kl}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{11}\cdots\mathbf{B}_{1l}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \mathbf{B}_{k1}\cdots\mathbf{B}_{kl}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}+\mathbf{B}_{11}\cdots\mathbf{A}_{1l}+\mathbf{B}_{1l}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \mathbf{A}_{k1}+\mathbf{B}_{k1}\cdots\mathbf{A}_{kl}+\mathbf{B}_{kl}\end{bmatrix}$$

$$\alpha\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}\cdots\mathbf{A}_{1l}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \mathbf{A}_{k1}\cdots\mathbf{A}_{kl}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha\mathbf{A}_{11}\cdots\alpha\mathbf{A}_{1l}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \alpha\mathbf{A}_{k1}\cdots\alpha\mathbf{A}_{kl}\end{bmatrix}$$

最後にひとこと　レッスン１はこれで終わりである。 ここでは６種の演算「和、スカラー倍、積、逆行列、転置、共役、共役転置」を定義し、基本的な性質をのべた。特に、行列算を面白くしているのは積の定義と結合則 $(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ とブロック算法である。積の結合則「$(\mathbf{AB})\mathbf{x}=\mathbf{A}(\mathbf{Bx})$」を見ると、積とは合成変換を表すことがわかる。積の逆行列、積の転置、ブロック行列の積、転置、などは間違いやすい演算なので要注意である。次のレッスンでは行列算法をベクトル空間、線形変換の概念に拡張していく。

腕試し問題

問題 1.1（行列算の復習問題） $\mathbf{a}=\left[a_1,\cdots,a_m\right]^T\in\mathbf{R}^{m\times1}$、$\mathbf{a}^T\mathbf{a}=a_1{}^2+\cdots+a_m{}^2=1$ とする。そして $\mathbf{P}=\mathbf{I}-\mathbf{aa}^T$、$\mathbf{H}=\mathbf{I}-2\mathbf{aa}^T$ とおく。$\mathbf{a}^T\mathbf{a}:1\times1,\ \mathbf{aa}^T:m\times m$ に注意。$\mathbf{P}$ を射影行列 projetion、$\mathbf{H}$ を反射行列 reflection という。次を証明せよ：

(1) $\mathbf{P}^T=\mathbf{P}$ （対称性）

(2) $\mathbf{H}^T=\mathbf{H}$ （対称性）

(3) $\mathbf{P}^2=\mathbf{P}$

(4) $\mathbf{H}^2=\mathbf{I}$、すなわち、$\mathbf{H}^{-1}=\mathbf{H}$

(5) $\mathbf{Pa}=\mathbf{0}$

(6) $(\mathbf{I}+\mathbf{H})\mathbf{a}=\mathbf{0}$

(7) $\mathbf{y}^T\mathbf{a}=0$ なら必ず $\mathbf{y}^T(\mathbf{I}-\mathbf{P})=\mathbf{0}$ （$\mathbf{y}\in\mathbf{R}^{m\times1}$）

(8) $\mathbf{y}^T\mathbf{a}=0$ なら必ず $\mathbf{y}^T(\mathbf{I}-\mathbf{H})=\mathbf{0}$ （$\mathbf{y}\in\mathbf{R}^{m\times1}$）

（略証　(1) $\mathbf{P}^T=(\mathbf{I}-\mathbf{aa}^T)^T=\mathbf{I}^T-(\mathbf{aa}^T)^T=\mathbf{I}-(\mathbf{a}^T)^T\mathbf{a}^T=\mathbf{I}-\mathbf{aa}^T=\mathbf{P}$ (2) 略

(3) $\mathbf{P}^2=(\mathbf{I}-\mathbf{aa}^T)(\mathbf{I}-\mathbf{aa}^T)=\mathbf{I}-\mathbf{aa}^T-\mathbf{aa}^T+\mathbf{a}(\mathbf{a}^T\mathbf{a})\mathbf{a}^T=\mathbf{I}-\mathbf{aa}^T=\mathbf{P}$。以下略。　■）

問題 1.2（指定された行または列を取り出す演算）次を示せ：与えられた $m\times n$ 行列 $\mathbf{A}$ の指定された行（第 i 行とする）または列（第 j 列とする）を取り出すには、m 次単位行列 $\mathbf{I}_m$ または n 次単位行列 $\mathbf{I}_n$ から同じ行または列を取り出し、$\mathbf{A}$ に左または右から掛ければよい。すなわち、

(1) $\mathbf{I}_m$ の第 i 行 $\mathbf{e}^i=\left[0\cdots010\cdots0\right]$（1 は左から i 番目の位置）を取り出す⇒$\mathbf{e}^i$ を $\mathbf{A}$ の左から掛ける⇒積 $\mathbf{e}^i\mathbf{A}$ =（$\mathbf{A}$ の第 i 行）

⑵ $\mathbf{I}_n$ の第 j 列 $\mathbf{e}_j = \left[0\cdots010\cdots0\right]^T$（1 は左から j 番目の位置）を取り出す⇒ $\mathbf{e}_j$ を $\mathbf{A}$ の右から掛ける⇒積 $\mathbf{Ae}_j$ ＝（$\mathbf{A}$ の第 j 列）

（略解　指定された演算を実行すればよい。■）

問題 1.3（順列行列の乗算による行または列の並べ替え）　m 次順列行列 permutation matrix（$m = 1, 2, \cdots$）とは m 次単位行列 $\mathbf{I}_m$ の行または列を並べ替えて得られる行列をいう。例：

$\left[1\right], \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ はそれぞれ 1 次、2 次、3 次順列行列の例である。順列行列の特徴は各行および各列にある“１”の個数が必ず 1 個であること、“1”以外の成分は“0”であること。また、順列行列の転置行列も順列行列である。m 次順列行列の個数は全部で $m! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot m$ 個ある。次を示せ：

⑴ $\mathbf{P}$ を任意の n 順列行列とすれば $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$

⑵　与えられた $m \times n$ 行列 $\mathbf{A}$ に対して、指定された行の並び替えを行うには、同じ並び替えを $\mathbf{I}_m$ に対して行って得られる順列行列を $\mathbf{A}$ に左から掛ければよい。

⑶　与えられた $m \times n$ 行列 $\mathbf{A}$ に対して、指定された列の並び替えを行うには、同じ並び替えを $\mathbf{I}_n$ に対して行って得られる順列行列を $\mathbf{A}$ に右から掛ければよい。

（略証　⑴ $n = 2$ の場合について説明する。 与えられた順列行列 $\mathbf{P}$ を $\mathbf{P} = \left[\mathbf{e}_k \ \ \mathbf{e}_l\right]$ と列分割形に書く。ここに (k, l) は $(1, 2)$ のひとつの順列、$\mathbf{e}_j \, (j = 1, 2)$ は $\mathbf{I}_2$ の第 j 列を表す。すると、

$$\mathbf{P}^T\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_k{}^T \\ \mathbf{e}_l{}^T \end{bmatrix} \left[\mathbf{e}_k \ \ \mathbf{e}_l\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_k{}^T\mathbf{e}_k & \mathbf{e}_k{}^T\mathbf{e}_l \\ \mathbf{e}_l{}^T\mathbf{e}_k & \mathbf{e}_l{}^T\mathbf{e}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_2 、$$

$$\mathbf{P}\mathbf{P}^T = \left[\mathbf{e}_k \ \ \mathbf{e}_l\right] \begin{bmatrix} \mathbf{e}_k{}^T \\ \mathbf{e}_l{}^T \end{bmatrix} = \mathbf{e}_k\mathbf{e}_k{}^T + \mathbf{e}_l\mathbf{e}_l{}^T = \mathbf{I}_2 \quad \text{ゆえに } \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$$

⑵ 下に示す例から類推して頂きたい。 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \end{bmatrix}$（行分割形）とし、$\mathbf{P}$ =⑴で使った順列行列とすると、

$$\mathbf{P}^T\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_k{}^T \\ \mathbf{e}_l{}^T \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_k{}^T\mathbf{A} \\ \mathbf{e}_l{}^T\mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^k \\ \mathbf{a}^l \end{bmatrix}$$

(3)　同上。$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2\end{bmatrix}$（列分割形）、$\mathbf{P}=$(1)で使った順列行列とすると、

$\mathbf{AP}=\mathbf{A}\begin{bmatrix}\mathbf{e}_k & \mathbf{e}_l\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{Ae}_k & \mathbf{Ae}_l\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_k & \mathbf{a}_l\end{bmatrix}$　■）

問題 1.4　(1)　$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \end{bmatrix}$に対して行の並び替え「現第 3 行→新第 1 行、現第 1 行→新第 2 行、現第 2 行→新第 3 行」を行い、つづけて「第 2 列と第 3 列の入れ替え」を行うと次の行列$\mathbf{B}$が得られる：$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 31 & 33 & 32 & 34 \\ 11 & 13 & 12 & 14 \\ 21 & 23 & 22 & 24 \end{bmatrix}$。前問を利用して、$\mathbf{P}_1\mathbf{AP}_2=\mathbf{B}$となるような順列行列$\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2$を求めよ。そして乗算を実行し検算せよ。

(2)　(1)と同じ行列$\mathbf{A}$に対して行の並び替え「現第 2 行→新第 1 行、現第 3 行→新第 2 行、現第 1 行→新第 3 行」を行い、つづけて「第 1 列と第 2 列の入れ替え、第 3 列と第 4 列の入れ替え」を行うと次の行列$\mathbf{B}$が得られる：

$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 22 & 21 & 24 & 23 \\ 32 & 31 & 34 & 33 \\ 12 & 11 & 14 & 13 \end{bmatrix}$　このとき、$\mathbf{P}_1\mathbf{AP}_2=\mathbf{B}$となるような順列行列$\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2$を求めよ。そして乗算を実行し検算せよ。

（答　(1)　$\mathbf{P}_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$、$\mathbf{P}_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$　(2)　$\mathbf{P}_1=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$、$\mathbf{P}_2=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$　■）

問題 1.5（各行または各列をスカラー倍する）　次を示せ：与えられた$m\times n$行列$\mathbf{A}$の第i行をk_i倍する（$i=1,\cdots,m$）、または第j列をl_j倍する（$j=1,\cdots,n$）には、m次単位行列$\mathbf{I}_m$またはn次単位行列$\mathbf{I}_n$に同じ操作を行った結果を、$\mathbf{A}$に左または右から掛ければよい。

（略解　例で示す。$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3\end{bmatrix}$、

$$\mathbf{D}_1=\begin{bmatrix}k_1 & 0\\ 0 & k_2\end{bmatrix}$$ ：$\mathbf{I}_2$ の第 i 行に k_i を掛けて得られる行列（$i=1,2$）

$$\mathbf{D}_2=\begin{bmatrix}l_1 & 0 & 0\\ 0 & l_2 & 0\\ 0 & 0 & l_3\end{bmatrix}$$ ：$\mathbf{I}_3$ の第 j 列に l_j を掛けて得られる行列（$j=1,2,3$）

とすれば

$$\mathbf{D}_1\mathbf{A}=\begin{bmatrix}k_1 & 0\\ 0 & k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{a}^1\\ \mathbf{a}^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1\mathbf{a}^1\\ k_2\mathbf{a}^2\end{bmatrix}、\mathbf{AD}_2=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}l_1 & 0 & 0\\ 0 & l_2 & 0\\ 0 & 0 & l_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_1\mathbf{a}_1 & l_2\mathbf{a}_2 & l_3\mathbf{a}_3\end{bmatrix}\quad \blacksquare）$$

問題 1.6　2×4 行列 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a & b & c & d\\ w & x & y & z\end{bmatrix}$ の第 1 行を 2 倍し、第 2 行を -3 倍し、続けて第 1 列を 3 倍し、第 4 列を -1 倍すると次の行列 $\mathbf{B}$ が得られる：

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}6a & 2b & 2c & -2d\\ -9w & -3x & -3y & 3z\end{bmatrix}$$

このとき、$\mathbf{D}_1\mathbf{AD}_2=\mathbf{B}$ となるような対角行列 $\mathbf{D}_1,\mathbf{D}_2$ を求めよ。そして左辺の乗算を実行し検算せよ。

（答　$\mathbf{D}_1=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}$、$\mathbf{D}_2=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$）

問題 1.7（指定された行または列の指定されたスカラー倍を他の行または列に加える）

$$\mathbf{L}_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ l_{21} & 1\end{bmatrix}$$ （$\mathbf{I}_2$ の第 1 行に l_{21} を乗じて第 2 行に加えたもの）

$$\mathbf{U}_1=\begin{bmatrix}1 & u_{12} & u_{13}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$ （$\mathbf{I}_3$ の第 1 列に u_{12},u_{13} を乗じてそれぞれ第 2 列、第 3 列に加えたもの）

$$\mathbf{U}_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & u_{23}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$ （$\mathbf{I}_3$ の第 2 列に u_{23} を乗じて第 3 列に加えたもの）

とおく。(1)-(6)を検算し(7)-(8)を解き、(9)を検算せよ：

(1) $\mathbf{U}_2\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(2) $\mathbf{L}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -l_{21} & 1 \end{bmatrix}$

(3) $\mathbf{U}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -u_{12} & -u_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 、$\mathbf{U}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

つぎに 、$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \mathbf{a}^3 \end{bmatrix}$（行分割形）$\equiv \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 \end{bmatrix}$（列分割形）を与えられた行列とすれば

(4) $\mathbf{L}_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ l_{21}\mathbf{a}^1 + \mathbf{a}^2 \end{bmatrix}$

（すなわち、$\mathbf{I}_2$ の第 1 行に l_{21} 乗じた結果を第２行に加えたものを $\mathbf{A}$ に左から掛けると、$\mathbf{A}$ に対して同じことが起こる）

(5) $\mathbf{A}\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & u_{12}\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 & u_{13}\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}$

（すなわち、$\mathbf{I}_3$ の第 1 列に u_{12}, u_{13} を乗じた結果を、それぞれ第 2、3 列に加えたものを $\mathbf{A}$ に右から掛けると、$\mathbf{A}$ に対して同じことが起こる）

(6) $\mathbf{A}\mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & u_{23}\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}$

（すなわち、$\mathbf{I}_3$ の第 2 列に u_{23} を乗じた結果を第 3 列に加えたものを $\mathbf{A}$ に右から掛けると、$\mathbf{A}$ に対して同じことが起こる）

(7)　$\mathbf{L}_1\mathbf{A}\mathbf{U}_1 \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & v \\ 0 & w & x \end{bmatrix} \equiv \mathbf{A}_1$

となるような$l_{21}, l_{31}, u_{12}, u_{13}$を求め、積$\mathbf{A}_1$を計算せよ。続いて

(8)　$\mathbf{L}_2\mathbf{A}_1\mathbf{U}_2 \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u & v \\ 0 & w & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} \equiv \mathbf{D}$

となるようなl_{32}, u_{23}を求め、積$\mathbf{D}$を計算せよ。

(9)　$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -l_{21} & 1 & 0 \\ -l_{31} & -l_{32} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -u_{12} & -u_{13} \\ 0 & 1 & -u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{LDU}$

を検算せよ。

要約：与えられた$m\times n$行列$\mathbf{A}$に対して、指定された行または列の指定されたスカラー倍を他の行または列に加えるには、$\mathbf{I}_m$または$\mathbf{I}_n$に同じ操作を行った結果を、$\mathbf{A}$に左または右から乗ずればよい。

（略解　(1)-(6)略　(7)　$\mathbf{L}_1\mathbf{A}\mathbf{U}_1 \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -13 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{A}_1$

(8)　$\mathbf{L}_2\mathbf{A}_1\mathbf{U}_2 \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{D}$

(9)　$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$を検算すればよい。　■）

問題 1.8　$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$を正方行列とする（次数は異なってよい）。すると、ブロック対角行列

$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}$の逆行列が存在する$\leftrightarrow$ $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$の逆行列が存在する。そして

$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^{-1} \end{bmatrix}$。以上を示せ。

（略証　$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} & \mathbf{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} & \mathbf{Z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$ とおき（$\mathbf{X}, \mathbf{Z}$ はそれぞれ $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ と同じ型の正方行列)、対応するブロックを等置すれば $\mathbf{A}_1\mathbf{W} = \mathbf{W}\mathbf{A}_1 = \mathbf{I}$、$\mathbf{A}_2\mathbf{Z} = \mathbf{Z}\mathbf{A}_2 = \mathbf{I}$、$\mathbf{A}_1\mathbf{X} = \mathbf{X}\mathbf{A}_2 = \mathbf{0}$、$\mathbf{A}_2\mathbf{Y} = \mathbf{Y}\mathbf{A}_1 = \mathbf{0}$ が得られる。これより $\mathbf{W} = \mathbf{A}_1^{-1},\ \mathbf{X} = \mathbf{0},\ \mathbf{Y} = \mathbf{0},\ \mathbf{Z} = \mathbf{A}_2^{-1}$。

検算：$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$　■）

問題 1.9（ブロック三角行列の逆行列）$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}$ を与えられたブロック上三角行列とする。ここに対角ブロック $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ は一般には型の異なる正方行列を表す。以下(1)(2)を示せ：

(1) $\mathbf{A}^{-1}$ が存在する $\leftrightarrow$ $\mathbf{A}_1^{-1}, \mathbf{A}_2^{-1}$ がともに存在する。

(2) $\mathbf{A}^{-1}$ が存在するとき、 それは $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & -\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}_2^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^{-1} \end{bmatrix}$ によって与えられることを示せ。とくに $\mathbf{A}_1 = \mathbf{I}_p,\ \mathbf{A}_2 = \mathbf{I}_q$ とすれば、$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_q \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & -\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_q \end{bmatrix}$。

（略証　前問と同様に $\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} & \mathbf{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} & \mathbf{Z} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$ が成立する必要十分条件を考える。ここに行列 $\begin{bmatrix} \mathbf{W} & \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} & \mathbf{Z} \end{bmatrix}$ は $\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}$ とまったく同じ仕方で分割されているものとする。これを展開し対応するブロックを等置すれば 8 個の関係式が得られる。これから(1)(2)を示せ。■）

問題 1.10　$\mathbf{A}$ を $m \times n$ 行列、$\mathbf{B}$ を $n \times m$ 行列、λ をスカラーとすれば次式が成り立つ：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{AB} - \lambda\mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & -\lambda\mathbf{I}_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{A} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\lambda\mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{BA} - \lambda\mathbf{I}_n \end{bmatrix}$$

（略証　直接計算で検証できる。■）

問題 1.11　複素数と行列の１対１対応関係

(1)　$z \equiv a+ib \Leftrightarrow \mathbf{M}(z) \equiv \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$

を考える（a,b は実数、$i^2=-1$）。すると次の関係(2)-(9)が成り立つことを検算せよ（z_1, z_2, z は任意の複素数を表す）：

(2)　$\mathbf{M}(0)=\mathbf{0}$（2 次ゼロ行列）

(3)　$\mathbf{M}(1)=\mathbf{I}$（2 次単位行列）

(4)　$\mathbf{M}(i) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

(5)　$\mathbf{M}(a \pm ib) = \mathbf{M}(a) \pm \mathbf{M}(i)\mathbf{M}(b)$ ：共役関係が“保存される”

(6)　$\mathbf{M}(z_1+z_2) = \mathbf{M}(z_1)+\mathbf{M}(z_2) = \mathbf{M}(z_2)+\mathbf{M}(z_1)$ ：和が“保存される”

(7)　$\mathbf{M}(z_1 z_2) = \mathbf{M}(z_1)\mathbf{M}(z_2) = \mathbf{M}(z_2)\mathbf{M}(z_1)$ ：積が“保存される”

(8)　$\mathbf{M}(1/z) = \mathbf{M}^{-1}(z)$（$z \neq 0$）

(9)　$\mathbf{M}(z_1/z_2) = \mathbf{M}(z_1)\mathbf{M}^{-1}(z_2) = \mathbf{M}^{-1}(z_2)\mathbf{M}(z_1)$（$z_2 \neq 0$）：商が“保存される”

以上をまとめて、「複素数体と $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ 型実行列全体とは体として同型である」という。

（略証　単純な計算で検証できる。$1/(a+ib) = a/(a^2+b^2) + i(-b/(a^2+b^2))$ に注意。■）

問題 1.12　一度は体験しておくべき手続きとして、実数から複素数を作る公理的手続きを示す。実数全体をこれまで通り $\mathbf{R}$ で表す。実数の順序対 (a,b) 全体の集合を考え、これを太字 $\mathbf{C}$ で表そう：$\mathbf{C} = \{(a,b) : a,b \in \mathbf{R}\}$。そして各対 (a,b) を複素数と呼び、$\mathbf{u}=(a,b),\ \mathbf{v}=(c,d)$ のように太字体で表すことにする。以下の定義を行う：

相等関係：$(a,b)=(c,d) \leftrightarrow a=c$ かつ $b=d$

和：$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

積：$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$

以下の事実が成り立つことを示せ（A1~D1 全体は体の公理系そのものである）。

（和に関する性質）

A1　（可換則）　$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$

A2　（結合則）$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$

A3　（ゼロ元の存在）　$\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$　（$\mathbf{0}=(0,0)$）

A4　（逆元の存在）$\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$ を満たす複素数「$-\mathbf{u}$」が存在する（$\mathbf{u}=(a,b)$ なら $-\mathbf{u}$ として $-\mathbf{u}=(-a,-b)$ をとればよい）　習慣上、$\mathbf{u}+(-\mathbf{v})$ を $\mathbf{u}-\mathbf{v}$ と書く。

（積に関する性質）

P1　（可換則）$\mathbf{uv}=\mathbf{vu}$

P2 （結合則）$(\mathbf{uv})\mathbf{w} = \mathbf{u}(\mathbf{vw})$

P3 （単位元の存在）　$\mathbf{1u} = \mathbf{u}$ を満たす単位元 $\mathbf{1}$ が存在する（$\mathbf{1} = (1,0)$ をとればよい）

P4 （逆元の存在）$\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ なら $\mathbf{uv} = \mathbf{1}$ を満たす一意的な $\mathbf{v}$ が存在する。これを $\mathbf{u}^{-1}$ と書く。

事実、$\mathbf{u} = (a,b) \neq \mathbf{0}$ なら　$\mathbf{u}^{-1} = (\dfrac{a}{a^2+b^2}, \dfrac{-b}{a^2+b^2})$

D1（分配則）$(\mathbf{u}+\mathbf{v})\mathbf{w} = \mathbf{uw} + \mathbf{vw}$

R1　$(a,0)$ 型の複素数について以下の事実が成立する：

　$(a,0)+(b,0) = (a+b,0)$, $(a,0)(b,0) = (ab,0)$、$-(a,0) = (-a,0)$、

　$a \neq 0$ なら $(a,0)^{-1} = (a^{-1},0)$

R2　$(0,1) = \mathbf{i}$ と書けば、$(a,b) = (a,0)+(0,1)(b,0) = (a,0)+\mathbf{i}(b,0)$、$\mathbf{i}^2 = (-1,0)$

　R1、R2 を見ると、$(a,0)$ 型の複素数は和、積ともに同じ $(a,0)$ 型であり、算法は対応する実数の算法とまったく同じである。ゆえに実数と $(a,0)$ 型の複素数との呼称の差を撤廃し、ともに実数と呼んでも混乱は生じないであろう。そこで太字体を通常の字体に改めると（$\mathbf{i}$ も i と書くと)、「複素数とは　実数 a,b から作った $a+ib$ 型の数であり、その算法は実数の算法と同じで、i^2 が出てきたらそれを -1 で置き換えればよい」といえる。$i^2+1=0$ ゆえ、実数の範囲では解をもたない方程式 $x^2+1=0$ も複素数の範囲では解けることになる。

（略証　すべて単純な計算で検証できる。■）