レッスン 10　ジョルダン分解　Part II

このレッスンでは、ジョルダン分解の応用として、行列関数の定義、スペクトル写像定理、微分方程式解法を扱う。行列関数 $f(\mathbf{A})$ の定義には、最初の節で定義する $\mathbf{M}$ 演算による方法がわかりやすい。直接代入形→ジョルダン分解代入形である $\mathbf{M}$ 演算形→コーシーの積分公式 $f(\mathbf{A})=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C f(\lambda)(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}dz$ の順に一般化していく。ここに、$f(\lambda)$ は $\mathbf{A}$ のスペクトル（固有値全体）を含む、複素領域内でいたるところ微分可能な関数、C は $\mathbf{A}$ のスペクトルを内部に含むその領域内の閉積分路、を表す。$\mathbf{M}$ 演算形からスペクトル写像定理「$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=(\lambda_1-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)$ なら、$\det(f(\mathbf{A})-\lambda\mathbf{I})=(f(\lambda_1)-\lambda)\cdots(f(\lambda_n)-\lambda)$」が簡単に出る。最後に、行列関数 $e^{t\mathbf{A}}$ の定係数線形微分方程式解法への応用を示す。複素解析からの必要な知識はその都度のべる。

10.1　M 演算

$f(\lambda)$ を微分可能な複素関数とし（今はどんな集合上で微分可能かは問題としない）、$f(\lambda)$ に対応して次の n 次上三角行列を定義する（$n=1,2,\cdots$）：

(1)　$$\mathbf{M}^{(n)}(f(\lambda))\equiv\mathbf{M}^{(n)}(f)\equiv\mathbf{M}(f)=\begin{bmatrix} f & f^{(1)} & f^{(2)}/2! & \cdots & & f^{(n-1)}/(n-1)! \\ & f & f^{(1)} & f^{(2)}/2! & \cdots & f^{(n-2)}/(n-2)! \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & f & f^{(1)} & f^{(2)}/2! \\ & & & & f & f^{(1)} \\ \mathbf{0} & & & & & f \end{bmatrix}$$

ただし、記号 $\mathbf{M}(f)$ は、n の値が前後関係から明らかな場合にのみ使う。$\mathbf{M}(f)$ の主対角成分はすべて $f(\lambda)$、その一本上の対角成分はすべて 1 階微分 $f^{(1)}(\lambda)\equiv f'(\lambda)$、その一本上の対角成分はすべて 2 階微分 $f^{(2)}(\lambda)/2!$、・・・である。演算 $f\to\mathbf{M}(f)$ を仮に $\mathbf{M}$ 演算 M operation と呼んでおく。

例 1　$f(\lambda)=0$ なら、$\mathbf{M}(f)=\mathbf{M}(1)=\mathbf{0}$

$$f(\lambda)=1 \text{ なら、} \mathbf{M}(f)=\mathbf{M}(1)=\begin{bmatrix} 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & 1 \end{bmatrix}=\mathbf{I}$$ （単位行列！）

$f(\lambda)=\lambda$ なら、$\mathbf{M}(f)=\mathbf{M}(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \\ \mathbf{0} & & & \lambda \end{bmatrix} \equiv \mathbf{J}^{(n)}(\lambda)$（ジョルダンブロック！）■

$\mathbf{M}$ 演算の価値は次の算法が成立する点にある：

(2)　$\mathbf{M}(f \pm g)=\mathbf{M}(f) \pm \mathbf{M}(g)$

(3)　$\mathbf{M}(cf)=c\mathbf{M}(f)$　（c は複素定数）

(4)　$\mathbf{M}(fg)=\mathbf{M}(f)\mathbf{M}(g)=\mathbf{M}(g)\mathbf{M}(f)$（積の高階微分に関するライプニッツの定理）

(5)　$\mathbf{M}(f^{-1})=\mathbf{M}^{-1}(f)$　（$f \neq 0$）

(6)　$\mathbf{M}(f/g)=\mathbf{M}(f)\mathbf{M}^{-1}(g)=\mathbf{M}^{-1}(g)\mathbf{M}(f)$（$g \neq 0$）

証明　(2)(3)は明らか。(4)は積の高階微分に関するライプニッツの定理 $\dfrac{(fg)^{(n)}}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}}{k!}\dfrac{g^{(n-k)}}{(n-k)!}$ から出る。(5)は $\mathbf{I}=\mathbf{M}(1)=\mathbf{M}(f \cdot f^{-1})$ に(4)を適用すればよい。最後の関係は $(f/g)^{*}=(f \cdot g^{-1})^{*}=f^{*}(g^{-1})^{*}$（(4)による）$=f^{*}(g^{*})^{-1}$（(5)による）。■

例 2　(5)より $\mathbf{M}^{-1}(\lambda)=\mathbf{M}(\lambda^{-1})$ が成り立つ。展開すれば

$$(\mathbf{J}^{(n)}(\lambda))^{-1}=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \mathbf{0} \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & & \lambda \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} & \lambda^{-3}\cdots & (-1)^{n-1}\lambda^{-n} \\ & \lambda^{-1} & \ddots \quad \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots \quad \ddots & \vdots \\ & & \ddots \quad \ddots & \lambda^{-3} \\ & & \ddots & -\lambda^{-2} \\ \mathbf{0} & & & \lambda^{-1} \end{bmatrix} \quad (\lambda \neq 0)$$

（$\because (\lambda^{-1})^{(k)}/k!=(-1)^{k}\lambda^{-1-k},\ k=1,2,\cdots$）■

例 3　公式(4)より

$$\mathbf{M}(a_0\lambda^{p}+a_1\lambda^{p-1}+\cdots+a_{p-1}\lambda+a_p)$$

$$=a_0\mathbf{M}(\lambda)^{p}+a_1\mathbf{M}(\lambda)^{p-1}+\cdots+a_{p-1}\mathbf{M}(\lambda)+a_p\mathbf{M}(1)$$

$$=a_0\mathbf{J}^{p}+a_1\mathbf{J}^{p-1}+\cdots+a_{p-1}\mathbf{J}+a_p\mathbf{I}$$　（$\mathbf{J} \equiv \mathbf{J}^{(n)}(\lambda)$→例 1 参照）■

例 4　前例の結果と公式(6)より

$$\mathbf{M}\left(\frac{a_0\lambda^{p}+a_1\lambda^{p-1}+\cdots+a_{p-1}\lambda+a_p}{b_0\lambda^{q}+b_1\lambda^{q-1}+\cdots+b_{q-1}\lambda+b_q}\right)$$　（ただし、$b_0\lambda^{q}+b_1\lambda^{q-1}+\cdots+b_{q-1}\lambda+b_q \neq 0$）

$$=(a_0\mathbf{J}^{p}+a_1\mathbf{J}^{p-1}+\cdots+a_{p-1}\mathbf{J}+a_p\mathbf{I})(b_0\mathbf{J}^{q}+b_1\mathbf{J}^{q-1}+\cdots+b_{q-1}\mathbf{J}+b_q\mathbf{I})^{-1}$$

$$=(b_0\mathbf{J}^q+b_1\mathbf{J}^{q-1}+\cdots+b_{q-1}\mathbf{J}+b_q\mathbf{I})^{-1}(a_0\mathbf{J}^p+a_1\mathbf{J}^{p-1}+\cdots+a_{p-1}\mathbf{J}+a_p\mathbf{I})\ \blacksquare$$

10.2　多項式 $P(\mathbf{A})$

いま、$P(\lambda)=a_0\lambda^p+a_1\lambda^{p-1}+\cdots+a_{p-1}\lambda+a_p$ を与えられた多項式とし、$P(\mathbf{A})$ について考える。ここに、$\mathbf{A}$ は与えられた n 次行列をあらわし、そのジョルダン分解を

$\mathbf{A}=\mathbf{VJV}^{-1}$ 、ここに

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix}\mathbf{J}^{(n_1)}(\lambda_1) & & \mathbf{0}\\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{J}^{(n_r)}(\lambda_r)\end{bmatrix}\equiv diag\{\mathbf{J}^{(n_1)}(\lambda_1),\cdots,\mathbf{J}^{(n_r)}(\lambda_r)\}$$

$$\mathbf{J}^{(n_k)}(\lambda_k)=\begin{bmatrix}\lambda_k & 1 & & \mathbf{0}\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_k & 1\\ \mathbf{0} & & & \lambda_k\end{bmatrix}$$（n_k は次数、$k=1,\cdots,r$ 、前節例 1 で使った記法と同じ）

とする。ゆえに、$\mathbf{A}$ の特性多項式は $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=(\lambda_1-\lambda)^{n_1}\cdots(\lambda_r-\lambda)^{n_r}$ である。

すると次の関係が成り立つ：

⑴　$P(\mathbf{A})=\mathbf{V}\cdot diag\{\ P(\mathbf{J}^{(n_1)}(\lambda_1)),\ \cdots,P(\mathbf{J}^{(n_r)}(\lambda_r))\ \}\cdot\mathbf{V}^{-1}$

$$=\mathbf{V}\cdot diag\{\mathbf{M}^{(n_1)}(P(\lambda_1),\cdots,\mathbf{M}^{(n_r)}(P(\lambda_r)\}\cdot\mathbf{V}^{-1}$$

ここに、$\mathbf{M}^{(n_k)}(P(\lambda_k))$ とは $\mathbf{M}^{(n_k)}(P(\lambda))$ に $\lambda=\lambda_k$ を代入した値を意味する。これよりまた

⑵　$\det(P(\mathbf{A})-\lambda\mathbf{I})=(P(\lambda_1)-\lambda)^{n_1}\cdots(P(\lambda_r)-\lambda)^{n_r}$

が従う。すなわち、$P(\mathbf{A})$ の固有値は $\{P(\lambda_1),\cdots P(\lambda_1);\ \cdots;P(\lambda_r),\cdots P(\lambda_r)\}$ によって与えられる。原行列の固有値 $\{\lambda_1,\cdots\lambda_1;\ \cdots;\lambda_r,\cdots\lambda_r\}$ と対比する立場から、この事実をスペクトル写像定理 spectral mapping theorem という。

証明　$P(\mathbf{A})=P(\mathbf{VJV}^{-1})=\mathbf{V}P(\mathbf{J})\mathbf{V}^{-1}$ （直接計算）

$$=\mathbf{V}\cdot diag\{\ P(\mathbf{J}^{(n_1)}(\lambda_1)),\ \cdots,P(\mathbf{J}^{(n_r)}(\lambda_r))\ \}\cdot\mathbf{V}^{-1}$$（直接計算）

$$=\mathbf{V}\cdot diag\{\mathbf{M}^{(n_1)}(P(\lambda_1)),\cdots,\mathbf{M}^{(n_r)}(P(\lambda_r))\}\cdot\mathbf{V}^{-1}$$（前節例 1 による）

これで(1)が示された。最後の式内の $diag\{\cdots\}$ は $\{P(\lambda_1),\cdots P(\lambda_1);\ \cdots;P(\lambda_r),\cdots P(\lambda_r)\}$ を対角成分としてもつ上三角行列を表す。これより(2)が従う。■

以上の結果を見ると、(2)式は $P(\mathbf{A})$ を前節で定義した $\mathbf{M}$ 演算によって表現している（この点が値打ち！）。第 2 に、この式中における $P(\lambda)$ の関与は $\mathbf{A}$ のスペクトル（＝固有値全体）上における $P, P', P^{(2)},\cdots$ の値だけである。これは多項式以外の複素関数 $f(\lambda)$ に対する $f(\mathbf{A})$ の定義に役立つ事実である（後ほど示す)。

例 1　いま、$P(\lambda)=\lambda^2-2\lambda-1$、与えられた 3 次行列 $\mathbf{A}$ のジョルダン分解を

$$\mathbf{A}=\mathbf{V}\mathbf{J}^{(3)}(\alpha)\mathbf{V}^{-1}=\mathbf{V}\begin{bmatrix}\alpha & 1 & 0\\ 0 & \alpha & 1\\ 0 & 0 & \alpha\end{bmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

とする。$\mathbf{A}$ の特性多項式は $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=(\alpha-\lambda)^3$ によって与えられる。上式(1)により

$$P(\mathbf{A})=\mathbf{V}\mathbf{M}^{(3)}(P(\alpha))\mathbf{V}^{-1}=\mathbf{V}\begin{bmatrix}P(a) & P'(\alpha) & P''(\alpha)/2\\ 0 & P(a) & P'(\alpha)\\ 0 & 0 & P(a)\end{bmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

$$=\mathbf{V}\begin{bmatrix}\alpha^2-2\alpha-1 & 2\alpha-2 & 1\\ 0 & \alpha^2-2\alpha-1 & 2\alpha-2\\ 0 & 0 & \alpha^2-2\alpha-1\end{bmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

ゆえに、$P(\mathbf{A})=\mathbf{A}^2-2\mathbf{A}-\mathbf{I}$ の特性多項式は確かに
$\det(P(\mathbf{A})-\lambda\mathbf{I})=(\alpha^2-2\alpha-1-\lambda)^3=(P(\alpha)-\lambda)^3$ によって与えられる。■

例 2　$\mathbf{A},\ P(\mathbf{A})$ は一般に異なるジョルダン標準形をもつ。実際、

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$ なら、$$\mathbf{A}^2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$ $\mathbf{A}^3=0$ である。$\mathbf{A},\mathbf{A}^2,\mathbf{A}^3$ の一次独立な固有ベクトルは、それぞれ、1、2、3 個存在する。ゆえに、レッスン 9 の結果により、ジョルダンブロックの総数は、それぞれ、1、2、3 である。すなわち、$\mathbf{A},\mathbf{A}^2,\mathbf{A}^3$ のジョルダン標準形は、$\mathbf{A}$ 自体、

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$、$\mathbf{0}$ である。■

10.3　分数関数 $P(\mathbf{A})Q^{-1}(\mathbf{A})$

$P(\lambda)=a_0\lambda^p+a_1\lambda^{p-1}+\cdots+a_{p-1}\lambda+a_p$ 、$Q(\lambda)=b_0\lambda^q+b_1\lambda^{q-1}+\cdots+b_{q-1}\lambda+b_q$ を与えられた多項式、$\mathbf{A}$ を与えられた n 次行列とすれば、$P(\lambda)Q(\lambda)=Q(\lambda)P(\lambda)$ が成り立つから、$P(\mathbf{A})Q(\mathbf{A})=Q(\mathbf{A})P(\mathbf{A})$ も成り立つ。$Q^{-1}(\mathbf{A})$ が存在すれば、これより $Q^{-1}(\mathbf{A})P(\mathbf{A})=P(\mathbf{A})Q^{-1}(\mathbf{A})$ も出る。そこで、これを分数関数 $R(\lambda)\equiv P(\lambda)/Q(\lambda)$ 中の“λ に $\mathbf{A}$ を代入したもの”と定義する。すなわち、

(1)　$R(\mathbf{A})\equiv Q^{-1}(\mathbf{A})P(\mathbf{A})=P(\mathbf{A})Q^{-1}(\mathbf{A})$

そして、$\mathbf{A}$ のジョルダン分解を考慮すれば、

(2)　$Q^{-1}(\mathbf{A})$ が存在する $\leftrightarrow$ $Q(\mathbf{A})$ の固有値はすべて非零 $\leftrightarrow$ $Q(\lambda_1),\cdots,Q(\lambda_r)\neq 0$

（最後の同値性は前節で得られたスペクトル写像定理による）

いいかえれば、「$Q^{-1}(\mathbf{A})$ が存在する」と「$\mathbf{A}$ の固有値はどれも $Q(\lambda)$ の零点ではない」は同値である。

$\mathbf{A}$ のジョルダン分解を前節で与えた形とすれば、同様の計算によって次式が従う：

(1)　$R(\mathbf{A})=\mathbf{V}\cdot diag\{\ R(\mathbf{J}^{(n_1)}(\lambda_1)),\ \cdots,R(\mathbf{J}^{(n_r)}(\lambda_r))\ \}\cdot\mathbf{V}^{-1}$

$$=\mathbf{V}\cdot diag\{\mathbf{M}^{(n_1)}(R(\lambda_1)),\cdots,\mathbf{M}^{(n_r)}(R(\lambda_r))\}\cdot\mathbf{V}^{-1}$$

$R(\mathbf{A})$ の特性多項式は

(2)　$\det(R(\mathbf{A})-\lambda\mathbf{I})=(R(\lambda_1)-\lambda)^{n_1}\cdots(R(\lambda_r)-\lambda)^{n_r}$

によって与えられる。仮定により、$\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ はどれも $R(\lambda)$ の分母を 0 にしない。これは前節のスペクトル写像定理の拡張を表す。

以上の証明は練習問題とする。

例　$f(\lambda)=1/\lambda$、$\mathbf{A}=\mathbf{V}\mathbf{J}^{(3)}(\alpha)\mathbf{V}^{-1}=\mathbf{V}\begin{bmatrix}\alpha & 1 & 0\\ 0 & \alpha & 1\\ 0 & 0 & \alpha\end{bmatrix}\mathbf{V}^{-1}$ とする。10.1 節例 2 を利用すれば、

$$f(\mathbf{A})=\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{V}[\mathbf{M}(\lambda^{-1})]_{\lambda=\alpha}\mathbf{V}^{-1}=\mathbf{V}\begin{bmatrix}\alpha^{-1} & -\alpha^{-2} & \alpha^{-3}\\ 0 & \alpha^{-1} & -\alpha^{-2}\\ 0 & 0 & \alpha^{-1}\end{bmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

$\det(\mathbf{A}^{-1}-\lambda\mathbf{I})=(\alpha^{-1}-\lambda)^3$　■

10.4　コーシーの積分公式

前 2 節において、$f(\lambda)$ ＝多項式または分数関数の場合は関係式

(1)　$f(\mathbf{A})=\mathbf{V}\cdot diag\{\mathbf{M}^{(n_1)}(f(\lambda_1)),\cdots,\mathbf{M}^{(n_r)}(f(\lambda_r))\}\cdot\mathbf{V}^{-1}$

の成立することが示された。ここに、与えられた n 行列 $\mathbf{A}$ のジョルダン分解形を以前の形を引き継いで（→10.2 節）

(2)　$\mathbf{A}=\mathbf{VJV}^{-1}$、$\mathbf{J}=\begin{bmatrix}\mathbf{J}^{(n_1)}(\lambda_1) & & \mathbf{0}\\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{J}^{(n_r)}(\lambda_r)\end{bmatrix}\equiv diag\{\mathbf{J}^{(n_1)}(\lambda_1),\cdots,\mathbf{J}^{(n_r)}(\lambda_r)\}$

としている（$n_1+\cdots+n_r=n$）。

1)式を見ると、右辺は $\mathbf{A}$ のジョルダン分解形と $\mathbf{A}$ のスペクトル上における $f, f^{(1)}, f^{(2)},\cdots$ の値のみを与えれば確定することが看てとれる。そこで分数関数以外の関数 $f(\lambda)$ に対しても、(1)を $f(\mathbf{A})$ の定義として採用するのが自然であろう。そして、 $f(\lambda)$ の範囲をどこまで広げるかは、むしろ、応用性の問題である。

そこで以下では与えらた $\mathbf{A}$ に対して、

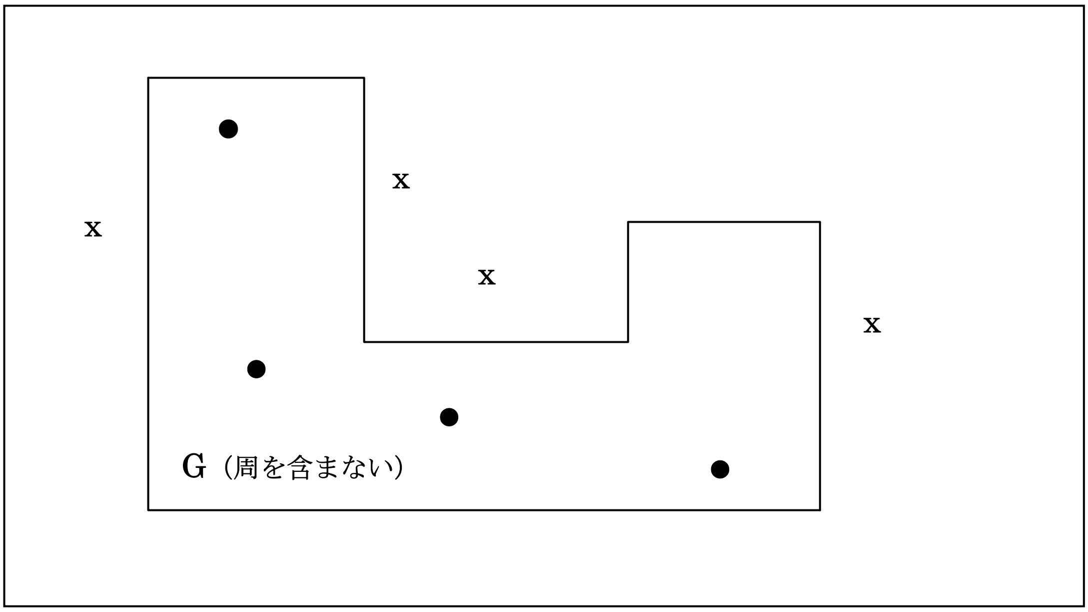
(3)　$f(\lambda)=\mathbf{A}$ のスペクトルを含む複素平面上のある領域 G 内の各点で微分可能な関数

のみを考えることにする。解析学の教えるところによれば、(3)型の関数は G 内の至るところで無限回微分可能である。

(I) 定義 (3)型の関数 $f(\lambda)$ に対して $f(\mathbf{A})$ を(1)により定義する。

ここに「領域」とは「開連結集合」をいう。正確な定義は専門書に譲るが、全平面、実部＞0 を満たす複素数の集合、周を含まない円板、三角形、長方形などの内部、はよく出てくる領域の例である。

例1　　分数関数 $f(\lambda)=P(\lambda)/Q(\lambda)$ に対応する領域 G の例：



ここに、●印＝$\mathbf{A}$ の固有値、x 印＝分母 $Q(\lambda)$ の零点、を表す。分母 $Q(\lambda)$ の零点はすべて G 外にあるので、$f(\lambda)$ は G 内の各点で微分可能である。また、$\mathbf{A}$ のスペクトルは G 内にあるため、$Q(\lambda)$ の各零点は $\mathbf{A}$ のどの固有値とも重ならない。ゆえに、$Q^{-1}(\mathbf{A})$ が存在し、$f(\mathbf{A})$ の定義(1)は意味をもつ。

(3)型の関数の重要な例は、10.2 – 3 節で扱った「λ の多項式」、「分母が G 内の各点で 0 とならないような分数関数」の他、「G 内の定点を中心とし、G を収束円の内部に含むような冪（ベキ）級数」が知られている。冪級数については後ほど詳しくのべる。

(II)　スペクトル写像定理

(4)　$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=(\lambda_1-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)$ なら $\det(f(\mathbf{A})-\lambda\mathbf{I})=\{f(\lambda_1)-\lambda\}\cdots\{f(\lambda_n)-\lambda\}$

証明　定義式(1)から明らか。■

(III)　(3)型の関数に対して本節の主題である次のコーシーの積分公式 Cauchy's integral formula が成立する：

(5)　$$f(\mathbf{A})=\frac{1}{2\pi\, i}\int_C f(\lambda)\cdot(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}d\lambda$$

ここに C は $\mathbf{A}$ のスペクトルを内部に含む領域 G 内の閉積分路を表す。ここに右辺の積分は成分ごとの積分、すなわち

$$f(\mathbf{A})|_{(p,q)}=\frac{1}{2\pi\, i}\int_C f(\lambda)\cdot(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}|_{(p,q)}\,d\lambda\ \ (p,q=1,\cdots,n)$$

を表す。

証明　まず、複素関数論の最重要公式である、コーシーの積分公式

(6)　$$f(a)=\frac{1}{2\pi\, i}\int_C\frac{f(\lambda)}{\lambda-a}d\lambda \quad \text{および} \quad \frac{f^{(k)}(a)}{k!}=\frac{1}{2\pi\, i}\int_C\frac{f(\lambda)}{(\lambda-a)^{k+1}}d\lambda\ \ (k=1,2,\cdots)$$

は既知であるとする。ここに a は C の内部にある任意点を表す。

次に、与えられたジョルダン分解より

$$(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\mathbf{V}(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{J})^{-1}\mathbf{V}^{-1}=\mathbf{V}diag\{(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{J}^{(n_1)}(\lambda_1))^{-1},\cdots(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{J}^{(n_r)}(\lambda_r))^{-1}\}\mathbf{V}^{-1}$$

これを(5)の右辺に代入すると、積分の線形性により

(7)　$$\frac{1}{2\pi\, i}\int_C f(\lambda)\cdot(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}d\lambda=\mathbf{V}\{\frac{1}{2\pi\, i}\int_C f(\lambda)\cdot(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{J})^{-1}d\lambda\}\mathbf{V}^{-1}$$

$$=\mathbf{V}\cdot diag\{\frac{1}{2\pi\, i}\int_C f(\lambda)(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{J}^{(n_1)}(\lambda_1))^{-1}d\lambda,\cdots,\frac{1}{2\pi\, i}\int_C f(\lambda)(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{J}^{(n_r)}(\lambda_r))^{-1}d\lambda\}\cdot\mathbf{V}^{-1}$$

ここで、10.2 節例 2 を利用すると

$$(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{J}^{(n_k)}(\lambda_k))^{-1}=\begin{bmatrix}(\lambda-\lambda_k)^{-1} & (\lambda-\lambda_k)^{-2} & \cdots\cdots & (\lambda-\lambda_k)^{-n_k}\\ & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & \ddots\quad\ddots & \vdots\\ & & \ddots\quad\ddots & \\ & & (\lambda-\lambda_k)^{-1} & (\lambda-\lambda_k)^{-2}\\ \mathbf{0} & & & (\lambda-\lambda_k)^{-1}\end{bmatrix}\quad (k=1,\cdots,r)$$

が得られる。これを上式に代入すると

$$\frac{1}{2\pi\ i}\int_C f(\lambda)\cdot(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{J}^{(n_k)}(\lambda_k))^{-1}d\lambda=\begin{bmatrix}c_0 & c_1 & \cdots\cdots & c_{n_k-1}\\ & c_0 & c_1 & \ddots\\ & & \ddots\quad\ddots & \\ & & c_0 & c_1\\ \mathbf{0} & & & c_0\end{bmatrix}$$

ここに、コーシーの積分公式(6)により、

$$c_0=\frac{1}{2\pi\ i}\int_C f(\lambda)\cdot(\lambda-\lambda_k)^{-1}d\lambda=f(\lambda_k),$$

$$c_m=\frac{1}{2\pi\ i}\int_C f(\lambda)\cdot(\lambda-\lambda_k)^{-m}d\lambda=\frac{f^{(m)}(\lambda_k)}{m!}\ (m=1,2,\cdots)$$

ゆえに、一つ前の式の右辺は **M** 演算で書けて

$$\frac{1}{2\pi\ i}\int_C f(\lambda)\cdot(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{J}^{(n_k)}(\lambda_k))^{-1}d\lambda=\mathbf{M}^{(n_k)}(f(\lambda_k))$$

これを(7)に代入し、$f(\mathbf{A})$ の定義式(1)を参照すれば、

$$\frac{1}{2\pi\ i}\int_C f(\lambda)(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}d\lambda=\mathbf{V}\cdot diag\{\mathbf{M}^{(n_1)}(f(\lambda_1)),\cdots,\mathbf{M}^{(n_r)}(f(\lambda_r))\}\cdot\mathbf{V}^{-1}=f(\mathbf{A})\quad\blacksquare$$

先へ進む前にこれまでに得られた結果を簡単に復習すると、多項式

$f(\lambda)=a_0\lambda^p+a_1\lambda^{p-1}+\cdots+a_{p-1}\lambda+a_p$ に対する $f(\mathbf{A})$ の表現形式には 3 種ある：

第 1 は直接代入形　$f(\mathbf{A})=a_0\mathbf{A}^p+a_1\mathbf{A}^{p-1}+\cdots+a_{p-1}\mathbf{A}+a_p\mathbf{I}$、

第 2 は **M** 演算形　$f(\mathbf{A})=\mathbf{V}\cdot diag\{\mathbf{M}^{(n_1)}(f(\lambda_1)),\cdots,\mathbf{M}^{(n_r)}(f(\lambda_r))\}\cdot\mathbf{V}^{-1}$、

第 3 はコーシーの積分公式　$f(\mathbf{A})=\dfrac{1}{2\pi\ i}\displaystyle\int_C f(\lambda)\cdot(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}d\lambda$

分数関数に対しても同様である。**M** 演算形はもともと直接代入形にジョルダン分解を代入して

得られたものであるが、その形から多項式、分数関数以外の関数族、すなわち、特定の領域内の至るところで微分可能な関数、に対する $f(\mathbf{A})$ の定義式として採用された。コーシーの積分公式を定義式として採用すれば、$\mathbf{M}$ 演算形は結果となる。分数関数を含み、一定の領域内で至るところ微分可能な関数族として、応用上重要な冪級数が知られている。ゆえに、$f(\lambda)$ が冪級数を表す場合は、$f(\mathbf{A})$ の定義が可能となる。そこで、次節以降は行列冪級数の話をする。

10.5　行列冪（ベキ）級数

最初に必要な予備知識をのべる。

(I)　冪級数 power series とは

(1)　$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$

型の無限級数、すなわち、部分和 partial sum $f_l(z) = \sum_{k=0}^{l} c_k z^k,\ l = 0,1,2,\cdots$ の（無限）列、のことをいう。ここに $c_0, c_1, \cdots$ は与えられた複素数、z は複素変数を表す。そして部分和の列が $z = a$ で収束すれば、極限値を冪級数の $z = a$ における和 sum という。慣例により元の冪級数自体を和の表現としても使う。すなわち、和を $f(a) = c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k a^k$ と書く。

冪級数論は解析学の教科書に詳しい解説がある。

冪級数の際立った特徴は次の(I)(II)である：

(a)　収束半径の存在：$|z| < R$ なら収束し、$|z| > R$ なら(発散する (＝収束しない) ような数 $R \geq 0$ が存在し、これを冪級数(1)の収束半径 radius of convergence という。また、$|z| = R$ を満たす z 全体を収束円 circle of convergence という。収束半径は $R = 1/\limsup_{l\to\infty} \sqrt[l]{|c_l|}$ によって与えられることが知られている（分母＝0 の場合は $R = \infty$、分母＝∞ の場合は $R = 0$ とする ）。収束円上での冪級数の挙動は多様である。

(b)　微分可能性：$R > 0$ なら、冪級数は収束円の内部（周は除外）で至るところ無限回微分可能な関数を表し、各階の導関数は項別微分で求めてよく、その収束半径は元の級数と同一である。すなわち、$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ の収束半径を $R > 0$ とすれば、収束円の内部で

$$f^{(1)}(z) = \frac{df}{dz}(z) = c_1 + 2c_2 z + 3c_3 z^2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1}$$

$$f^{(2)}(z) = 2c_2 + 6c_3 z + 12c_4 z^2 + \cdots = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k z^{k-2}$$

………

が成立し、$f^{(1)}(z), f^{(2)}(z), \cdots$ もすべて収束半径 R をもつ。

例1　応用上重要な冪級数と収束半径（証明略）

冪級数	収束半径	収束円上の挙動
$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$	∞	
$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$	∞	
$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots$	∞	
$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$	1	$\lvert z \rvert = 1$ なら発散
$1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots$	1	$z = 1$ を除き、$\lvert z \rvert = 1$ 上で収束
$1 + z + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{3^2} + \cdots$	1	$\lvert z \rvert = 1$ 上の各点で収束

項別微分により

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z,\ \frac{d}{dz} \sin z = \cos z,\ \frac{d}{dz} \cos z = -\sin z \quad (\lvert z \rvert < \infty)$$

$$\frac{d}{dz}(1-z)^{-1} = (1-z)^{-2} = 1 + 2z + 3z^2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} \quad (\lvert z \rvert < 1)$$

$$\frac{d}{dz}\left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots\right) = 1 + z + z^2 + \cdots = (1-z)^{-1} \quad (\lvert z \rvert < 1)$$

$$\frac{d}{dz}\left(1 + z + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{3^2} + \cdots\right) = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots \quad (\lvert z \rvert < 1) \qquad ■$$

(II)　行列冪級数　行列の（無限）列 $\{\mathbf{A}_k\}$ $(\mathbf{A}_k \in \mathbf{C}^{m \times n}, k = 1, 2, \cdots)$ が $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{m \times n}$ に収束するとは<u>成分ごとに収束する</u> to convergence componentwise、すなわち、

$$\mathbf{A}_k = \left[a_{ij}^{(k)}\right] \to \mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]\ (k \to \infty) \quad \leftrightarrow \quad a_{ij}^{(k)} \to a_{ij}\ (k \to \infty)\ (i = 1, \cdots, m,\ j = 1, \cdots, n)$$

を意味するものと定義する。これが任意の行列ノルム $\|\cdot\|$ に関する収束 $\|\mathbf{A}_k - \mathbf{A}\| \to 0$ と同値であることはレッスン 14 で証明する。無限級数 $c_0 \mathbf{I} + c_1 \mathbf{A} + c_2 \mathbf{A}^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \mathbf{A}^k$ とは、スカラー級数の場合と同じく、部分和の（無限）列を意味するものとし、この列が収束するとき、元の

冪級数は収束するといい、級数表現自体を和の表現として使う。極限値を和と呼ぶこともスカーラー級数の場合と同じである。

例 2

$$\mathbf{J}^k \to \mathbf{0}\ (k \to \infty) \leftrightarrow |\lambda| < 1 \quad \text{ここに、} \mathbf{J} = \mathbf{J}^{(n)}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \\ \mathbf{0} & & & \lambda \end{bmatrix}$$

証明　10.1 で学んだ $\mathbf{M}$ 演算を使えば

$$\mathbf{J}^k = \mathbf{M}^k(\lambda) = \mathbf{M}(\lambda^k) = \begin{bmatrix} c_0^{(k)}\lambda^k & c_1^{(k)}\lambda^{k-1} & \cdots & c_{n-1}^{(k)}\lambda^{k-n+1} \\ & c_0^{(k)}\lambda^k & c_2^{(k)}\lambda^{k-1} & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \\ & & c_0^{(k)}\lambda^k & c_2^{(k)}\lambda^{k-1} \\ \mathbf{0} & & & c_0^{(k)}\lambda^k \end{bmatrix}$$

ここに

$$c_l^{(k)} = \frac{k!}{l!(k-l)!} = \frac{k(k-1)\cdots(k-l+1)}{l!} = O(k^l)\ \ (k = 0,1,\cdots,\ l = 0,1,\cdots,n-1)$$

ゆえに、$k \to \infty$ のとき、$|\lambda| < 1$ なら、$c_l^{(k)} \to 0$ 、$|\lambda| \ge 1$ なら、$\left|c_l^{(k)}\right| \to \infty$。　■

(III)　直接代入形の成立　いま、$\mathbf{A}$ を与えられた n 次行列、

$f(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\lambda^k$ を $\mathbf{A}$ のスペクトルを収束円の内部に含むような冪級数とすれば、

(2)　直接代入形　$f(\mathbf{A}) = c_0\mathbf{I} + c_1\mathbf{A} + c_2\mathbf{A}^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} c_k\mathbf{A}^k$

(3)　$\mathbf{M}$ 演算形　$f(\mathbf{A}) = \mathbf{V}\cdot diag\{\mathbf{M}^{(n_1)}(f(\lambda_1)),\cdots,\mathbf{M}^{(n_r)}(f(\lambda_r))\}\cdot\mathbf{V}^{-1}$ 、

(4)　コーシーの積分公式　$f(\mathbf{A}) = \dfrac{1}{2\pi\, i}\int_C f(\lambda)\cdot(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} d\lambda\ \mathbf{A}$

はすべて同一の行列を表す。ここに $\mathbf{A}$ のジョルダン分解は 10.2 節と同一形にとっている：

$$\mathbf{A} = \mathbf{VJV}^{-1}\text{、}\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}^{(n_1)}(\lambda_1) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{J}^{(n_r)}(\lambda_r) \end{bmatrix} \equiv diag\{\mathbf{J}^{(n_1)}(\lambda_1),\cdots,\mathbf{J}^{(n_r)}(\lambda_r)\}\text{、}$$

$$\mathbf{J}^{(n_k)}(\lambda_k)=\begin{bmatrix}\lambda_k & 1 & & \mathbf{0}\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda_k & 1\\ \mathbf{0} & & & \lambda_k\end{bmatrix}$$（n_k 次行列、$k=1,\cdots,r$）

証明　(I)(を受け入れれば、$f(\mathbf{A})$ は前節で示したように、$\mathbf{M}$ 演算形またはコーシーの積分公式によって定義でき、両者は等しい。ゆえに、(2) = (3)を示せばよい。冪級数の第 k 部分和 $f_k(\lambda)=\sum_{l=0}^{k}c_l\lambda^l$（$l=0,1,\cdots$）に対しては(2) = (3)が成立しているから

$$f_k(\mathbf{A})=\sum_{l=0}^{k}c_l\mathbf{A}^l=\mathbf{V}\cdot diag\{\mathbf{M}^{(n_1)}(f_k(\lambda_1)),\cdots,\mathbf{M}^{(n_r)}(f_k(\lambda_r))\}\cdot\mathbf{V}^{-1}$$

ここで $k\to\infty$ とすれば、上でのべた冪級数の性質(a)(b)(c)と各 $\mathbf{M}$ 演算の形から、右辺は $\mathbf{V}\cdot diag\{\mathbf{M}^{(n_1)}(f(\lambda_1)),\cdots,\mathbf{M}^{(n_r)}(f(\lambda_r))\}\cdot\mathbf{V}^{-1}$ に収束する。ゆえに、

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{l=0}^{k}c_l\mathbf{A}^l=\sum_{l=0}^{\infty}c_l\mathbf{A}^l==\mathbf{V}\cdot diag\{\mathbf{M}^{(n_1)}(f_k(\lambda_1)),\cdots,\mathbf{M}^{(n_r)}(f_k(\lambda_r))\}\cdot\mathbf{V}^{-1}$$

これは証明すべき式に他ならない。■

（注意）一般に $\mathbf{A}$ の固有値は複素数だから、$e^{t\lambda_1},\cdots$ は e^z 型の数である。$z=a+ib$（a,b は実数）とすれば、$e^z=e^a(\cos b+i\sin b)$ である。

例 1　行列指数関数 $e^{t\mathbf{A}}$　冪級数 $e^\lambda=1+\lambda+\dfrac{\lambda^2}{2!}+\dfrac{\lambda^3}{3!}+\cdots$ の収束半径は ∞ であるから、任意のスカラー定数 t、任意の複素変数 λ に対して、$f(\lambda)\equiv e^{t\lambda}=1+t\lambda+\dfrac{t^2\lambda^2}{2!}+\dfrac{t^3\lambda^3}{3!}+\cdots$ も収束する。ゆえに、任意の t、任意の n 次行列 $\mathbf{A}$ に対して $f(\mathbf{A})=e^{t\mathbf{A}}=1+t\mathbf{A}+\dfrac{t^2\mathbf{A}^2}{2!}+\dfrac{t^3\mathbf{A}^3}{3!}+\cdots$ も収束する。すると、上の一般論から

$$e^{t\mathbf{A}}=f(\mathbf{A})=\mathbf{V}\cdot diag\{\mathbf{M}^{(n_1)}(f(\lambda_1)),\cdots,\mathbf{M}^{(n_r)}(f(\lambda_r))\}\cdot\mathbf{V}^{-1}$$

そして、右辺の各対角ブロック $\mathbf{M}^{(n_k)}(f(\lambda_k))$ は直接計算から次式によって与えられる：

$$\mathbf{M}^{(n_k)}(f(\lambda_k)) = e^{t\lambda_k}\begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2! \cdots t^{n_k-1}/(n_k-1)! \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & t^2/2! \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & t \\ \mathbf{0} & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (k = 1, \cdots, r)$$

例として、3次行列 $\mathbf{A}$ のジョルダン分解を

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{VJV}^{-1} \equiv \mathbf{V}\begin{bmatrix} \mathbf{J}^{(1)}(2) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}^{(2)}(2) \end{bmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

とすれば、$e^{t\mathbf{A}}$ は次式によって与えられる：

$$e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{V}\begin{bmatrix} e^{2t}[1] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}\mathbf{V}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\left(e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ■$$

10.6　定係数線形微分方程式への応用　Part I

本節では前節例 1 で定義した行列指数関数 $e^{t\mathbf{A}}$ の応用として、定係数線形同次微分方程式

(1) $$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}y_0(t) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}y_{n-1}(t) \end{bmatrix} \equiv \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} y_0(t) \\ \vdots \\ y_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_0(t) \\ \vdots \\ y_{n-1}(t) \end{bmatrix}$$ （行列形：$\dfrac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{y}(t)$）

について考える。ここに $a_{11}, \cdots$ は既知（複素）定数、$y_1(t), \cdots$ は未知関数、t は独立変数を表し、「行列の微分は成分ごとの微分」と定義する。最初に

(2) $$\frac{d}{dt}e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{A}e^{t\mathbf{A}}$$

を示す。実際、前節例 1 で示したように、任意の t、任意の $\mathbf{A}$ に対して、冪級数展開

$e^{t\mathbf{A}}=\mathbf{I}+t\mathbf{A}+t^2\dfrac{\mathbf{A}^2}{2!}+t^3\dfrac{\mathbf{A}^3}{3!}+\cdots$ が成立する。ゆえに、右辺の各行列成分は t に関して収束半径 ∞ の冪級数を表す。ゆえに、各成分の微分は項別微分に等しく、これは $e^{t\mathbf{A}}$ の微分は右辺を直接 t で微分してよいことを意味する。ゆえに、

$$\frac{d}{dt}e^{t\mathbf{A}}=\frac{d}{dt}(\mathbf{I}+t\mathbf{A}+t^2\frac{\mathbf{A}^2}{2!}+t^3\frac{\mathbf{A}^3}{3!}+\cdots)=\mathbf{0}+\mathbf{A}+t\mathbf{A}^2+t^2\frac{\mathbf{A}^3}{2!}+\cdots=\mathbf{A}e^{t\mathbf{A}}$$

(2)の両辺に右から任意ベクトル $\mathbf{c}=\left[c_1,\cdots c_n\right]^T$ を乗じると、$\dfrac{d}{dt}e^{t\mathbf{A}}\mathbf{c}=\mathbf{A}e^{t\mathbf{A}}\mathbf{c}$ となるから、

(3)　$\mathbf{y}=e^{t\mathbf{A}}\mathbf{c}$

は(1)の解を表すことがわかる。そして、(1)の解はこれ以外にないことは微分方程式論の教えるところである。結論として、微分方程式(1)の解法は $e^{t\mathbf{A}}$ の計算に帰すことがわかる。

例 1　$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\1&0&2\end{bmatrix}$ なら、$e^{t\mathbf{A}}=e^{2t}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\t&0&1\end{bmatrix}$ ゆえ（前節例 1）、$\dfrac{d\mathbf{y}(t)}{dt}=\mathbf{A}\mathbf{y}(t)$ の解は

$\mathbf{y}=e^{t\mathbf{A}}\mathbf{c}=e^{2t}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\t&0&1\end{bmatrix}\mathbf{c}=e^{2t}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_1t+c_3\end{bmatrix}$ によって与えられる。ここに、c_1,c_2,c_3 は任意定数を表す。微分方程式に代入すれば検算できる。■

10.7　定係数線形微分方程式への応用　Part II

本節では前節の方法により、定係数常微分方程式

(1)　$a_0y+a_1y^{(1)}+\cdots+a_{n-1}y^{(n-1)}-y^{(n)}=0$　　（$y=y(t),\ y^{(1)}=\dfrac{dy^{(1)}(t)}{dt},\cdots$）

が解けることを示す。ここに $a_0,\cdots,a_{n-1}$ は既知（複素）定数を表す。(1)に対応して多項式

(2)　$f(\lambda)=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\cdots+a_{n-1}\lambda^{n-1}-\lambda^n=-(\lambda-\lambda_1)^{n_1}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{n_r}$

を考え、(1)の特性多項式という。ここに右辺の因数分解形における $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ は<u>異なる</u>（複素）数を表し、$n_1+\cdots+n_r=n$ としている。

前節の方法を適用するため、まず(1)を次のように行列形に書き直す：

(3) $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots\cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 \cdots\cdots & & a_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ y^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y \\ y^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} : \mathbf{Ay} = \frac{d\mathbf{y}}{dt}$$

左辺の $n \times n$ 行列 $\mathbf{A}$ を(1)のコンパニオン行列 companion matrix という。$\mathbf{A}$ の特性多項式と微分方程式(1)の特性多項式との間には簡単な関係がある：$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = (-1)^{n+1} f(\lambda)$（検算して下さい)。また、$\mathbf{A}$ の任意の固有値 α に対応する固有ベクトルは、$(\mathbf{A} - \alpha \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ を解けば簡単に出るように、$\left[1, -\alpha, \alpha^2, -\alpha^3, \cdots\right]^T$ のスカラー倍に限られる。ゆえに、各異なる固有値に対応するジョルダンブロックは 1 個のみ存在する。ゆえに $\mathbf{A}$ のジョルダン分解は

(4) $$\mathbf{A} = \mathbf{VJV}^{-1} = \mathbf{V} \cdot diag\{\mathbf{J}^{(n_1)}(\lambda_1), \cdots, \mathbf{J}^{(n_r)}(\lambda_r)\} \cdot \mathbf{V}^{-1}$$

すると、前節の結果から(3)の解は

(5) $$\mathbf{y} = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{c}'$$

$$= \mathbf{V} \cdot diag\{e^{t\lambda_1} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2! \cdots t^{n_1-1}/(n_1-1)! & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots \quad \ddots & t^2/2! \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & t \\ \mathbf{0} & & & & 1 \end{bmatrix}, \cdots\cdots\} \cdot \mathbf{c}$$

よって与えられる。ここに $\mathbf{c}'$ は任意ベクトルを表す（ゆえに $\mathbf{c} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{c}'$ も任意)。求める未知関数 $y(t)$ は $\mathbf{y}$ の第 1 成分であるから

(6) $$y = \mathbf{e}_1{}^T \mathbf{y} = (\mathbf{e}_1{}^T \mathbf{V}) \cdot diag\{\cdots\} \cdot \mathbf{c} \quad (\mathbf{e}_1 = \left[1\ 0\ 0 \cdots 0\right]^T)$$

ゆえに、特性多項式の各零点、その重複度、$\mathbf{V}$ の第 1 行がわかれば未知関数 y が定まることになる。さいわい、特性多項式 $f(\lambda)$ の零点と重複度がわかれば、$\mathbf{V}$ は陽に記述できる。例によって示す。

例 1　$n = 5$ とし、次の微分方程式を考える：

$$a_0 y + a_1 y^{(1)} + a_2 y^{(2)} + a_3 y^{(3)} + a_4 y^{(4)} - y^{(5)} = 0 \text{（}a_0, \cdots, a_4 \text{ は既知複素定数）}$$

特性多項式は次式で与えられる： $f(\lambda)=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+a_3\lambda^3+a_4\lambda^4-\lambda^5$

微分方程式を行列形で書くと

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ y^{(1)} \\ y^{(2)} \\ y^{(3)} \\ y^{(4)} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y \\ y^{(1)} \\ y^{(2)} \\ y^{(3)} \\ y^{(4)} \end{bmatrix} \quad : \ \mathbf{Ay}=\frac{d\mathbf{y}}{dt}$$

この場合は $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=f(\lambda)$ である。

ここから先の話は $f(\lambda)$ の因数分解形に依存する。

(A)　$f(\lambda)=0$ が 5 重根をもつ場合　$f(\lambda)=-(\lambda-\alpha)^5$ とする。すると、次の 5 式が成立する：

$$0=f(\alpha)/0!=a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+a_3\alpha^3+a_4\alpha^4-\alpha^5$$

$$0=f^{(1)}(\alpha)/1!=a_1+a_2 2\alpha+a_3 3\alpha^2+a_4 4\alpha^3-5\alpha^4$$

$$0=f^{(2)}(\alpha)/2!=a_2+a_3 3\alpha+a_4 6\alpha^2-10\alpha^3$$

$$0=f^{(3)}(\alpha)/3!=a_3+a_4 4\alpha-10\alpha^2$$

$$0=f^{(4)}(\alpha)/4!=a_4-5\alpha$$

これは次の行列形に書ける：

$\mathbf{AV}=\mathbf{VJ}$ ：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha^2 & 2\alpha & 1 & 0 & 0 \\ \alpha^3 & 3\alpha^2 & 3\alpha & 1 & 0 \\ \alpha^4 & 4\alpha^3 & 6\alpha^2 & 4\alpha & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha^2 & 2\alpha & 1 & 0 & 0 \\ \alpha^3 & 3\alpha^2 & 3\alpha & 1 & 0 \\ \alpha^4 & 4\alpha^3 & 6\alpha^2 & 4\alpha & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

これは実際に乗算を実行すれば確認できる。ここに $\mathbf{V}$ の各列は各式

$0=f(\alpha), 0=f^{(1)}(\alpha), 0=f^{(2)}(\alpha)/2!, \cdots$ 中における $a_0,\cdots,a_4$ の係数を読み取って上から順に並べたものになっている。また、各行は見かけ上、$(\alpha+1)^0,(\alpha+1)^1,(\alpha+1)^2,\cdots$ を展開し左から降冪順に並べたものになっている。$\mathbf{V}$ は可逆行列（$\because \det\mathbf{V}=1$）であるから、上式は $\mathbf{A}$ のジョルダン分解形を与えている。

以上により、y は次式によって与えられる：

$$y=\mathbf{e}_1^T e^{t\alpha}\begin{bmatrix}1 & t & t^2/2! & t^3/3! & t^4/4! \\ & 1 & t & t^2/2! & t^3/3! \\ & & 1 & t & t^2/2! \\ & & & 1 & t \\ & & & & 1\end{bmatrix}\mathbf{c}=e^{t\alpha}\left[1,\ t,\ t^2/2!,\ t^3/3!,\ t^4/4!\right]\mathbf{c}$$

すなわち、$y(t)$ は $e^{t\alpha}$, $te^{t\alpha}$, $t^2e^{t\alpha}$, $t^3e^{t\alpha}$, $t^4e^{t\alpha}$ の任意の一次結合によって与えられる。念のため $(D-\alpha)^5(t^k e^{t\alpha})=0\ (k=0,1,2,3,4)$ （$D=d/dt$）を検算して下さい。

(B)　$f(\lambda)=0$ が単根 5 個をもつ場合　$f(\lambda)=-(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)(\lambda-\delta)(\lambda-\varepsilon)$ とする。すると次の 5 式が成立する：

$$0=f(\alpha)=a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+a_3\alpha^3+a_4\alpha^4-\alpha^5$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$0=f(\varepsilon)=a_0+a_1\varepsilon+a_2\varepsilon^2+a_3\varepsilon^3+a_4\varepsilon^4-\varepsilon^5$$

行列形に書けば

$\mathbf{AV}=\mathbf{VJ}$ ：

$$\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\a_0&a_1&a_2&a_3&a_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\ \alpha&\beta&\gamma&\delta&\varepsilon\\ \alpha^2&\beta^2&\gamma^2&\delta^2&\varepsilon^2\\ \alpha^3&\beta^3&\gamma^3&\delta^3&\varepsilon^3\\ \alpha^4&\beta^4&\gamma^4&\delta^4&\varepsilon^4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\ \alpha&\beta&\gamma&\delta&\varepsilon\\ \alpha^2&\beta^2&\gamma^2&\delta^2&\varepsilon^2\\ \alpha^3&\beta^3&\gamma^3&\delta^3&\varepsilon^3\\ \alpha^4&\beta^4&\gamma^4&\delta^4&\varepsilon^4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha&0&0&0&0\\0&\beta&0&0&0\\0&0&\gamma&0&0\\0&0&0&\delta&0\\0&0&0&0&\varepsilon\end{bmatrix}$$

$\alpha,\cdots,\varepsilon$ は相異なる数だから、$\mathbf{V}$（ヴァンデルモンド行列！）は可逆行列を表し、この式は $\mathbf{A}$ のジョルダン分解を与えている。実際、

$$\det\mathbf{V}=(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\alpha-\varepsilon)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\beta-\varepsilon)(\gamma-\delta)(\gamma-\varepsilon)(\delta-\varepsilon)\neq 0$$

解 y は次式によって与えられる：

$$y=\left[1\ 1\ 1\ 1\ 1\right]diag\{\left[e^{t\alpha}\right]\ \left[e^{t\beta}\right]\ \left[e^{t\gamma}\right]\ \left[e^{t\delta}\right]\ \left[e^{te}\right]\}\mathbf{c}=\left[e^{t\alpha}\ \ e^{t\beta}\ \ e^{t\gamma}\ \ e^{t\delta}\ \ e^{te}\right]\mathbf{c}$$

すなわち、y は $e^{t\alpha}$, $e^{t\beta}$, $e^{t\gamma}$, $e^{t\delta}$, e^{te} の任意一次結合によって与えられる。

(C)（中間的場合の例）$f(\lambda)=0$ が異なる 2 重根 2 個と単根をもつ場合

$f(\lambda)=-(\lambda-\alpha)^2(\lambda-\beta)^2(\lambda-\gamma)$（$\alpha,\beta,\gamma$ は相異なる数）とすれば、次の 5 式が成立する：

$$0=f(\alpha)/0!=a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+a_3\alpha^3+a_4\alpha^4-\alpha^5$$

$$0=f^{(1)}(\alpha)/1!=a_1+a_2 2\alpha+a_3 3\alpha^2+a_4 4\alpha^3-5\alpha^4$$

$$0 = f(\beta)/0! = a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2 + a_3\beta^3 + a_4\beta^4 - \beta^5$$

$$0 = f^{(1)}(\beta)/1! = a_1 + a_2 2\beta + a_3 3\beta^2 + a_4 4\beta^3 - 5\beta^4$$

$$0 = f(\gamma)/0! = a_0 + a_1\gamma + a_2\gamma^2 + a_3\gamma^3 + a_4\gamma^4 - \gamma^5$$

行列形に書けば

$\mathbf{AV} = \mathbf{VJ}$ ：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & \beta & 1 & \gamma \\ \alpha^2 & 2\alpha & \beta^2 & 2\beta & \gamma^2 \\ \alpha^3 & 3\alpha^2 & \beta^3 & 3\beta^2 & \gamma^3 \\ \alpha^4 & 4\alpha^3 & \beta^4 & 4\beta^3 & \gamma^4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & \beta & 1 & \gamma \\ \alpha^2 & 2\alpha & \beta^2 & 2\beta & \gamma^2 \\ \alpha^3 & 3\alpha^2 & \beta^3 & 3\beta^2 & \gamma^3 \\ \alpha^4 & 4\alpha^3 & \beta^4 & 4\beta^3 & \gamma^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

ここに $\mathbf{V}$ は可逆行列を表し、上式は $\mathbf{A}$ のジョルダン分解を表すことになる。実際、$\det \mathbf{V} = (\alpha-\beta)^4(\alpha-\gamma)^2(\beta-\gamma)^2 \neq 0$。この関係の導出には、$\det \mathbf{V} = F = F(\alpha,\beta,\gamma)$ とおき、$\mathbf{V}$ の構成法から

$$0 = (F)_{\alpha=\beta} = \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\beta} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}\right)_{\alpha=\beta} = \left(\frac{\partial^3 F}{\partial \alpha^3}\right)_{\alpha=\beta}$$

$$0 = (F)_{\alpha=\gamma} = \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\gamma}、\ 0 = (F)_{\beta=\gamma} = \left(\frac{\partial F}{\partial \beta}\right)_{\beta=\gamma}$$

が成立することを確かめ、$\det \mathbf{V}$ は α,β,γ に関する多項式であることに着目すればよい（詳細略）。行列式の微分法についてはレッスン 6、問題 6.12 参照。

以上から、解 y は次式によって与えられる：

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} diag\{e^{t\alpha}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, e^{t\beta}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, e^{t\gamma}\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}\}\mathbf{c} = \begin{bmatrix} e^{t\alpha} & te^{t\alpha} & e^{t\beta} & te^{t\beta} & e^{t\gamma} \end{bmatrix}\mathbf{c}$$

すなわち、y は $e^{t\alpha},\ te^{t\alpha},\ e^{t\beta},\ te^{t\beta},\ e^{t\gamma}$ の任意一次結合によって与えられる。■

以上から得られる一般的結論は次の通りである：

特性多項式の因数分解形(2)が知られれば、(1)の解は次の n 個の解（基本解）

$$e^{t\lambda_k}, te^{t\lambda_k}, \cdots, t^{n_k-1}e^{t\lambda_k}\ \ (k = 1,\cdots,r)$$

の任意一次結合によって与えられる。

この結論は次のようにして検算できる：$D \equiv \dfrac{d}{dt}, D^2 = \dfrac{d}{dt}(\dfrac{d}{dt}) = \dfrac{d^2}{dt^2}, \cdots$ と書くと、(1)は

$f(D)y = -(D-\lambda_1)^{n_1} \cdots (D-\lambda_r)^{n_r} y = 0$ と書ける。各基本解を代入すれば、

$$(D-\lambda_k I)^{n_k} e^{\lambda_k t} = 0, \cdots, (D-\lambda_k I)^{n_k} t^{n_k - 1} e^{\lambda_k t} = 0 \quad (k = 1, \cdots, r)$$

が成り立ち、$D-\lambda_1, \cdots, D-\lambda_r$ は可換であるから（作用させる順序を変えてよいから）、結局基本解はすべて(1)を満たし、その任意一次結合も(1)を満たす。念のため、簡単な例を追加する：

例 2　$-2y + 7y^{(1)} - 9y^{(2)} + 5y^{(3)} - y^{(4)} = 0$

$$f(\lambda) = -2 + 7\lambda - 9\lambda^2 + 5\lambda^3 - \lambda^4 = -(\lambda-1)^3(\lambda-2)$$

ゆえに解 y は次の 4 個の基本解の任意一次結合によって与えられる：$e^t, te^t, t^2e^t, e^{2t}$　■

この節で示した行列法による解法が複雑化したのは、解 y を求める問題を未知ベクトル $\left[y \;\; y^{(1)} \cdots y^{(n-1)} \right]^T$ を求める問題として定式化したからである。

最後にひとこと：このレッスンの華は、「行列関数 $f(\mathbf{A})$」の定義に 3 種あることを示す過程、その副産物である「スペクトル写像定理」、「行列指数関数 $e^{t\mathbf{A}}$」の定係数微分方程式解法への応用である。

腕試し問題

問題 10.1　**M** 演算（→10.1 節）を利用して次の関係を証明せよ：

(1) $$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \{k(k-1)/2\}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

(2) $$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}^{-k} = \begin{bmatrix} \lambda^{-k} & -k\lambda^{-k-1} & \{k(k+1)/2\}\lambda^{-k-2} \\ 0 & \lambda^{-k} & -\lambda^{-k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^{-k} \end{bmatrix} \quad (\lambda \neq 0、k = 1, 2, \cdots)$$

問題 10.2　$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ を満たす 2 次行列 $\mathbf{A}$ をすべて求めよ。

（略解：$\mathbf{A}$ の特性方程式を $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)$ とすれば、スペクトル写像定理により、$\mathbf{B} \equiv \mathbf{A}^2 - \mathbf{A} = \mathbf{0}$ の特性多項式は $\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}) = (\lambda_1{}^2 - \lambda_1 - \lambda)(\lambda_2{}^2 - \lambda_2 - \lambda)$。$\mathbf{B} = \mathbf{0}$ だから

$\lambda_i^2 - \lambda_i = 0$、すなわち $\lambda_i = 0,1\ (i=1,2)$。ゆえに、$\mathbf{A}$ のジョルダン分解を $\mathbf{A} = \mathbf{VJV}^{-1}$ とすれば、可能な $\mathbf{J}$ の形は $\mathbf{J} = (a)\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, (b)\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, (c)\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, (d)\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}, (e)\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$ の 5 種のみである。このうち、最後の二つの場合は $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ が満たされない。最初の三つの場合は $\mathbf{A} = \mathbf{I}, \mathbf{0}, \mathbf{V}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\mathbf{V}^{-1}$ となり $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ は確かに満たされる。この最後の場合は、

$\mathbf{V} = \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix},\ \mathbf{V}^{-1} = (ad-bc)^{-1}\begin{bmatrix}d & -b\\-c & a\end{bmatrix}$ ($ad - bc = 1$) と仮定しても一般性を失わないことに注意すると（∵任意の定数 $k \neq 0$ に対して $\mathbf{VJV}^{-1} = (k\mathbf{V})\mathbf{J}(k\mathbf{V})^{-1}$）、結局求める $\mathbf{A}$ は次の 5 種となる：$\mathbf{A} = \mathbf{I},\ \mathbf{0},\ \begin{bmatrix}1 & \alpha\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & \alpha\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\alpha & \alpha(1-\alpha)/\beta\\ \beta & 1-\alpha\end{bmatrix}$ （$\beta \neq 0$, α は任意）　■）

問題 10.3　2 次行列のジョルダン分解

$\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix}-6 & 4\\-25 & 14\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 1\\5 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 1\\0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1\\-5 & 2\end{bmatrix} \equiv \mathbf{VJV}^{-1}$ を利用し、$\mathbf{X}^2 = \mathbf{A}$ を解け。

（略解：$\mathbf{X} = \mathbf{VZV}^{-1}$ とおけば、$\mathbf{Z}^2 = \mathbf{J}$。これを解けば、$\mathbf{Z} = \pm\begin{bmatrix}2 & 1/4\\0 & 2\end{bmatrix}$ が得られる。ゆえに $\mathbf{X}^2 = \mathbf{A}$ の解は $\mathbf{X} = \mathbf{VZV}^{-1} = \pm\begin{bmatrix}2 & 1\\5 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1/4\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1\\-5 & 2\end{bmatrix} = \pm(1/4)\begin{bmatrix}-2 & 4\\-25 & 18\end{bmatrix}$。■）

問題 10.4　$\mathbf{A}$ のジョルダン標準形が $\mathbf{J} = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & -1 & 1\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}$ であることを知って、

$h(\mathbf{A}) = (\mathbf{A}-\mathbf{I})(\mathbf{A}^2+\mathbf{A}+\mathbf{I})^{-1}$ の特性多項式 $\det\{h(\mathbf{A}) - \lambda\mathbf{I}\}$ を求めよ。

（略解：$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (2-\lambda)(-1-\lambda)$、$h(\lambda) = (\lambda-1)/(\lambda^2+\lambda+1)$ だから、スペクトル写像定理により、$\det\{h(\mathbf{A}) - \lambda\mathbf{I}\} = (h(2)-\lambda)(h(-1)-\lambda)^2 = (\frac{1}{7}-\lambda)(-\frac{2}{3}-\lambda)^2$　■）

問題 10.5 （プロジェクト型問題）　この問題では「$\mathbf{A}$ を n 次行列とすれば、$f(\mathbf{A})$ はかならず $\mathbf{A}$ に関する高々 $n-1$ 次多項式によって表現できる」を示す。

実際、$\mathbf{A}$ を n 次行列、ジョルダン分解を

(1)　$\mathbf{A} = \mathbf{V}diag\{\mathbf{J}^{(n_1)}(\lambda_1), \cdots, \mathbf{J}^{(n_r)}(\lambda_r)\}\mathbf{V}^{-1} \equiv \mathbf{VJV}^{-1}$　（$n_1 + \cdots + n_r = n$）

とすれば（→10.2 節）、$f(\mathbf{A})$ は次式によって定義されている（→10.4 節(1)式）

(2)　$f(\mathbf{A}) = \mathbf{V}\cdot diag\{\mathbf{M}^{(n_1)}f(\lambda_1), \cdots, \mathbf{M}^{(n_r)}f(\lambda_r)\}\cdot\mathbf{V}^{-1}$

$$\mathbf{M}^{(n_k)}(f(\lambda_k))=\begin{bmatrix} f & f^{(1)}/1! & \cdots & f^{(n_k-1)}/(n_k-1)! \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & f & f^{(1)}/1! \\ \mathbf{0} & & & & & f \end{bmatrix} \quad (f=f(\lambda_k),\ f^{(1)}=f^{(1)}(\lambda_k),\ \cdots)$$

$(k=1,\cdots,r)$

以上の式を見ると、「与えられた二つの関数 $f(\lambda), g(\lambda)$ に対して $f(\mathbf{A})=g(\mathbf{A})$ が成立するための必要十分条件は

(4)　$\mathbf{M}^{(n_k)}(f(\lambda_k))=\mathbf{M}^{(n_k)}(g(\lambda_k)),\ k=1,\cdots,r$

すなわち、

(5)　$f(\lambda_k)=g(\lambda_k),\ f^{(1)}(\lambda_k)=g^{(1)}(\lambda_k),\ \cdots,\ f^{(n_k-1)}(\lambda_k)=g^{(n_k-1)}(\lambda_k),\ k=1,\cdots,r$

で与えられる」ことがわかる。

ただ、$\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ はすべて相異なるとは限らないから、(5)の条件の一部は重複している可能性がある。そこで、$\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ のうち、相異なるものだけを集めて $\mu_1,\cdots,\mu_s$ と書き直し、各 $\mu_1,\cdots$ に対応するジョルダンブロックの最大次数を $m_1,\cdots,m_s$ と書けば、(5)から重複分を省けば、

(6)　$f(\mu_j)=g(\mu_j),\ f^{(1)}(\mu_j)=g^{(1)}(\mu_j),\ \cdots,\ f^{(m_j-1)}(\mu_j)=g^{(m_j-1)}(\mu_j),\ j=1,\cdots,s$

となる。

例えば、$f(\lambda)=(\mu_1-\lambda)^{m_1}\cdots(\mu_s-\lambda)^{m_s}$（すなわち、$\mathbf{A}$ の最小多項式）をとれば、直接計算により、$f(\mu_j)=f^{(1)}(\mu_j)=\cdots=f^{(m_j-1)}(\mu_j)=0,\ j=1,\cdots,s$。ゆえ(6)を満たす $g(\lambda)$ としてに $g(\lambda)\equiv 0$ が取れる。ゆえに、$f(\mathbf{A})=g(\mathbf{A})=\mathbf{0}$。また、$f(\lambda)$ として特性多項式 $f(\lambda)=\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$ をとれば、やはり、$f(\mu_j)=f^{(1)}(\mu_j)=\cdots=f^{(m_j-1)}(\mu_j)=0,\ j=1,\cdots,s$ が満たされる。ゆえに、$f(\mathbf{A})=\mathbf{0}$。これはケイリー・ハミルトンの定理に他ならない。

以下において「与えられた関数 $f(\lambda)$ に対して $f(\mathbf{A})=g(\mathbf{A})$ を満たす高々（$m_1+\cdots+m_s-1$）（$\le n-1$）次多項式 $g(\lambda)$ が唯一つ存在する」を示す。このような $g(\lambda)$ は $\mathbf{A}$ のスペクトル上における、$f(\lambda)$ のエルミート補間多項式 Hermite interpolation polynomial と呼ばれている。このような $g(\lambda)$ は $f(\lambda)$ のみならず、$\mathbf{A}$ にも依存することは明らかである。例によって証明法を示し、一般化は練習問題とする。

そこで、例として $f(x)$ を与えられた関数、a,b,c を異なる 3 点とし、次の 7 個の補間条件

を満たす 6 次エルミート補間多項式 $g(x)$ を求める問題を考える：

(7)　$f(a)=g(a),\ f^{(1)}(a)=g^{(1)}(a),\ f^{(2)}(a)=g^{(2)}(a),\ f^{(3)}(a)=g^{(3)}(a),$
　　$f(b)=g(b),\ f^{(1)}(b)=g^{(1)}(b),$
　　$f(c)=g(c)$

　まず、$g(x)$ は次の形で求まることを示す（一意性の証明は後ほど）：

(8)
$$g(x)=(x-b)^2(x-c)\{\alpha_0+\frac{\alpha_1}{1!}(x-a)+\frac{\alpha_2}{2!}(x-a)^2+\frac{\alpha_3}{3!}(x-a)^3\}$$
$$+(x-a)^4(x-c)\{\beta_0+\frac{\beta_1}{1!}(x-b)\}+(x-a)^4(x-b)^2\gamma_0$$

ここに $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\gamma_0$ は補間条件から決定すべき未定係数を表す。

「$f(a)=g(a),\ f^{(1)}(a)=g^{(1)}(a),\ f^{(2)}(a)=g^{(2)}(a),\ f^{(3)}(a)=g^{(3)}(a)$」（$x=a$ における補間条件）を行列形に書くと、

(9)
$$\begin{bmatrix} f(a) \\ f^{(1)}(a) \\ f^{(2)}(a) \\ f^{(3)}(a) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \delta & 0 & 0 & 0 \\ * & \delta & 0 & 0 \\ * & * & \delta & 0 \\ * & * & * & \delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}\quad (\delta\equiv(a-b)^2(a-c))$$

となることを示せ。ここに「*」印は既知成分を表す。右辺の 4 x 4（下三角）行列は $\delta\neq 0$ ゆえ、可逆行列を表す。ゆえに、全く任意に与えられた $f(a),\cdots,f^{(3)}(a)$ の値に対して(11)式を満たす $\alpha_0,\cdots,\alpha_3$ が一意的に定まる。

　同様の手続きによりに、全く任意に与えられた $f(b),f^{(1)}(b),f(c)$ の値に対して β_0,β_1,γ_0 が一意的に定まることを示せ。

　次に一意性の証明のために高々6 次多項式 $g(x)=g_1(x),\ g_2(x)$ がともに(7)を満たせば、$h(x)\equiv g_1(x)-g_2(x)\equiv 0$ であることを次の手順によって示せ。まず、$h(x)$ は次の補間条件を満たすことを示せ：

(10)　$h(a)=h^{(1)}(a)=h^{(2)}(a)=h^{(3)}(a)=0,$
　　$h(b)=h^{(1)}(b)=0,$
　　$h(c)=0$

　微積分学におけるテイラーの定理により最初の条件より $h(x)=(x-a)^4p(x)$ と書けることを示せ。（ここに $p(x)$ は高々3 次多項式を表す）。$a\neq b$ ゆえ、続く 2 条件より $p(b)=p^{(1)}(b)=0$ を出し、$p(x)=(x-b)^2q(x)$（$q(x)$ は高々1 次）であることを示せ。a,b,c は相異なる数だから、(10)式最後の条件より $q(c)=0$、すなわち、$q(x)=d\cdot(x-c)$（d は定数）が出る。以上を総合すると、$h(x)=d\cdot(x-a)^4(x-b)^2(x-c)$ となり、$h(x)$ は高々6 次だから $d=0$ でなければならない。すなわち、$h(x)\equiv 0$ でなければならない。■

問題 10.6（前問の応用問題） $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1\\-4&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&-2\\-2&1\end{bmatrix}\equiv\mathbf{VJV}^{-1}$ とする。

(1) $(2\mathbf{A}+\mathbf{I})(\mathbf{A}^2-\mathbf{A}+\mathbf{I})^{-1}=\alpha_0\mathbf{I}+\alpha_1(\mathbf{A}-2\mathbf{I})$ を満たす α_0,α_1 を求めよ。

(2) $e^{\mathbf{A}}=\beta_0\mathbf{I}+\beta_1(\mathbf{A}-2\mathbf{I})$ を満たす定数 β_0,β_1 を求めよ。

（解　$\mathbf{A}$ のジョルダン標準形は単一ブロックから構成され、異なる固有値は $\lambda_1=2$ のみである。

(1) $f(\lambda)=(2\lambda+1)/(\lambda^2-\lambda+1)$、$g(\lambda)=\alpha_0+\alpha_1(\lambda-2)$ とおけば、補間条件は

$$f(2)=g(2)\ :\ \frac{2\cdot 2+1}{2^2+2+1}=\frac{5}{7}=\alpha_0$$

$$f^{(1)}(2)=g^{(1)}(2)\ :\ \frac{-2\lambda^2-2\lambda+1}{(\lambda^2+\lambda+1)^2}\Big|_{\lambda=2}=-\frac{11}{49}=\alpha_1$$

これより $g(\lambda)=\alpha_0+\alpha_1(\lambda-2)=\frac{5}{7}-\frac{11}{47}(\lambda-2)$、$g(\mathbf{A})=\frac{5}{7}\mathbf{I}-\frac{11}{49}(\mathbf{A}-2\mathbf{I})$ 得られる。

検算：

$$f(\mathbf{A})=(2\mathbf{A}+\mathbf{I})(\mathbf{A}^2+\mathbf{A}+\mathbf{I})^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1&2\\-8&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3&5\\-20&17\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&2\\-8&9\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{49}\begin{bmatrix}17&-5\\20&-3\end{bmatrix}=\frac{1}{49}\begin{bmatrix}57&-11\\44&13\end{bmatrix}$$

$$g(\mathbf{A})=\frac{5}{7}\mathbf{I}-\frac{11}{49}(\mathbf{A}-2\mathbf{I})=\frac{1}{49}\begin{bmatrix}57&-11\\44&13\end{bmatrix}=f(\mathbf{A})$$

(2) $f(\lambda)=e^{\lambda},g(\lambda)=\beta_0+\beta_1(\lambda-2)$ とおけば、補間条件は $f(\lambda_1)=g(\lambda_1)$ および

$f^{(1)}(\lambda_1)=g^{(1)}(\lambda_1)$ によって与えられる。これを解けば、　$e^2=\beta_0=\beta_1$ が得られる。ゆえに、

$$e^{\mathbf{A}}=e^2\mathbf{I}+e^2(\mathbf{A}-2\mathbf{I})=e^2(\mathbf{A}-\mathbf{I})=e^2\begin{bmatrix}-1&1\\-4&3\end{bmatrix}$$

検算：$e^{\mathbf{A}}=\mathbf{V}\begin{bmatrix}e^2&e^2\\0&e^2\end{bmatrix}\mathbf{V}^{-1}=\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^2&e^2\\0&e^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&-2\\-2&1\end{bmatrix}=e^2\begin{bmatrix}-1&1\\-4&3\end{bmatrix}$ ■）

問題 10.7　ジョルダン分解

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-14 & 2 & 3\\ -26 & 5 & 5\\ -64 & 8 & 14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & -1\\ 8 & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & -1 & -1\\ -11 & 2 & 2\\ -4 & 0 & 1\end{bmatrix}=\mathbf{VJV}^{-1}$$ を 知 っ て 微 分 方 程 式

$\dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}=\mathbf{A}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}$を解け。

（略解:ジョルダン標準形 $\mathbf{J}$ の形から一般解は $\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}=\mathbf{V}\begin{bmatrix}e^t\\ e^{2t}\\ te^{2t}\end{bmatrix}\mathbf{c}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & -1\\ 8 & 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^t\\ e^{2t}\\ te^{2t}\end{bmatrix}\mathbf{c}$ によって与えられる。ここに $\mathbf{c}$ は 3×1 任意行列を表す。■）

問題 10.8 （スペクトル写像定理の応用）

与えられた 3 次行列 $\mathbf{A}$ の特性多項式が $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=(1-\lambda)(2-\lambda)^2$ であることを知って、次の行列の特性多項式を求めよ。

(a)　$p(\mathbf{A})=\mathbf{A}^2-\mathbf{I}$

(b)　$q(\mathbf{A})=(\mathbf{A}-\mathbf{I})(\mathbf{A}+\mathbf{I})^{-1}$

(c)　$r(\mathbf{A})=(\mathbf{I}-\mathbf{A})e^{c\mathbf{A}}$

(d)　$f(\mathbf{A})=\dfrac{1}{2\pi\, i}\displaystyle\int_C f(\lambda)(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}d\lambda$　　ただし $f(\lambda)$ は点1, 2 を含む複素領域内で至るところ微分可能とし、閉積分路 C はこの領域内にあって点1, 2 を内部に含むものとする。

（略解：スペクトル写像定理を使う。

(a)　$\det(p(\mathbf{A})-\lambda\mathbf{I})=(p(1)-\lambda)(p(2)-\lambda)^2=(-\lambda)(3-\lambda)^2$　（$p(\lambda)=\lambda^2-1$）

(b)　$\det(q(\mathbf{A})-\lambda\mathbf{I})=(q(1)-\lambda)(q(2)-\lambda)^2=(-\lambda)(\frac{1}{3}-\lambda)^2$　（$q(\lambda)=(\lambda-1)/(\lambda+1)$）

(c)　$\det(r(\mathbf{A})-\lambda\mathbf{I})=(r(1)-\lambda)(r(2)-\lambda)^2=(-\lambda)(-e^{2c}-\lambda)^2$（$r(\lambda)=(1-\lambda)e^{c\lambda}$）

(d)　$\det(f(\mathbf{A})-\lambda\mathbf{I})=(f(1)-\lambda)(f(2)-\lambda)^2$　■）

問題 10.9　(a)　$y-y^{(2)}=0$ を解け。(b)　$-y-y^{(2)}=0$ を解け。

（略解：(a) 特性多項式は $f(\lambda)=1-\lambda^2=(1-\lambda)(1+\lambda)$ で与えられる。ゆえに、一般解は $y=c_1e^t+c_2e^{-t}$　(b)　特性多項式は $f(\lambda)=-1-\lambda^2=(i-\lambda)(i+\lambda)$ で与えられる。ゆえに、一般解は $y=c_1e^{ti}+c_2e^{-ti}=(c_1+c_2)\cos t+i(c_1-c_2)\sin t=c_1^{'}\cos t+c_2^{'}\sin t$　■）

問題 10.10　次の各場合に対して微分方程式

$f(D)y=a_0y+a_1y^{(1)}+a_2y^{(2)}-y^{(3)}=0$（$D=d/dt$ 、a_0,a_1,a_2 は与えられた定数、

$y = y(t),\ y^{(1)} = dy/dt, \cdots$）のコンパニオン行列のジョルダン分解と微分方程式の解を求めよ。

(a) $f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 - \lambda^3 = (1-\lambda)^3$ の場合

(b) $f(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)^2$ の場合、

(c) $f(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)$ の場合

（略解：10.7 節の結果を利用する。コンパニオン行列のジョルダン分解を $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{J}\mathbf{V}^{-1}$ と書く。

(a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$　$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \alpha^2 & 2\alpha & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一般解 $y(t)$ は e^t, te^t, t^2e^t の任意の一次結合で与えられる。

(b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -8 & 5 \end{bmatrix}$　$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & 1 \\ \alpha^2 & \beta^2 & 2\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

一般解 $y(t)$ は e^t, e^{2t}, te^{2t} の任意の一次結合で与えられる。

(c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$　$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

一般解 $y(t)$ は e^t, e^{2t}, e^{-t} の任意の一次結合で与えられる。■）

問題 10.11　次の行列のジョルダン分解を求めよ：

(a)　$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-1&-4&-6&-4\end{bmatrix}$　　(b)　$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-4&-4&3&2\end{bmatrix}$

（略解：　10.7 節の方法に従う。ジョルダン分解を $\mathbf{A}=\mathbf{VJV}^{-1}$ と書くと：

(a)　$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=1+4\lambda+6\lambda^2+4\lambda^3+\lambda^4=(1+\lambda)^4$

$$\mathbf{V}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\\alpha&1&0&0\\\alpha^2&2\alpha&1&0\\\alpha^3&3\alpha^2&3\alpha&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&1&0&0\\1&-2&1&0\\-1&3&-3&1\end{bmatrix}\quad\mathbf{J}=\begin{bmatrix}\alpha&1&0&0\\0&\alpha&1&0\\0&0&\alpha&1\\0&0&0&\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$$

(b)　$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=4+4\lambda-3\lambda^2-2\lambda^3+\lambda^4=(1+\lambda)^2(2-\lambda)^2$

$$\mathbf{V}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\\alpha&1&\beta&1\\\alpha^2&2\alpha&\beta^2&2\beta\\\alpha^3&3\alpha^2&\beta^3&3\beta^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\-1&1&2&1\\1&-2&4&4\\-1&3&8&12\end{bmatrix}\quad\mathbf{J}=\begin{bmatrix}\alpha&1&0&0\\0&\alpha&0&0\\0&0&\beta&1\\0&0&0&\beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}\quad\blacksquare)$$

問題 10.12（プロジェクト型問題）差分商と差分商行列

いま、$n(\geq 2)$ を与えられた自然数、$z_1, z_2, \cdots$ を複素平面上の異なる点、$w=f(z)$ を少なくとも $\{z_1,\cdots,z_n\}$ 上で定義された複素関数とするとき、

(1)　$f(z_i,z_j)=\dfrac{f(z_i)-f(z_j)}{z_i-z_j}\ (i\neq j)$

型の数を（1 階）差分商 divided difference という。高階差分商は再帰的に次式によって定義される：

(2)　$n-1$階差分商（$n\geq 2$）：$f(z_1,z_2,\cdots,z_n)=\dfrac{f(z_1,\cdots,z_{n-1})-f(z_2,\cdots,z_n)}{z_1-z_n}$

そして関数値自体 $f(z_1),\cdots$ は 0 階差分商と見なす。差分商は数値計算上の重要ツールとして古くからよく知られている。

例 1　2 階差分商の例

$$f(z_1,z_2,z_3)=\frac{f(z_1,z_2)-f(z_2,z_3)}{z_1-z_3},\quad f(z_2,z_3,z_1)=\frac{f(z_2,z_3)-f(z_3,z_1)}{z_2-z_1},\cdots$$

展開すればわかるようにこの両者は相等しい。

(A)　$f(z_1,\cdots,z_n)$ の値は $z_1,\cdots,z_n$ の配列順序に無関係である。実際、

(3)　$f(z_1,\cdots,z_n)=\dfrac{1}{2\pi\, i}\displaystyle\int_C\frac{f(\lambda)}{(\lambda-z_1)\cdots(\lambda-z_n)}d\lambda\equiv g(z_1,\cdots,z_n)$

が成り立つことを次の手順に従って示せ。ここに、$f(\lambda)$ は $z_1,\cdots,z_n$ を含むある領域内で至るところ微分可能な複素関数、C は $z_1,\cdots,z_n$ をその内部に含む、その領域内の閉積分路を表す。まず、(3)の右辺を $g(z_1,\cdots,z_n)$ と呼び、部分分数展開

$$\frac{1}{(\lambda-z_1)\cdots(\lambda-z_n)}=\frac{1}{z_1-z_n}\{\frac{1}{(\lambda-z_1)\cdots(\lambda-z_{n-1})}-\frac{1}{(\lambda-z_2)\cdots(\lambda-z_n)}\}$$

を代入すると

$g(z_1,\cdots,z_n)=\{g(z_1,\cdots,z_{n-1})-g(z_2,\cdots,z_n)\}/(z_1-z_n)$ がでる。また

コーシーの積分公式 $f(z_k)=\dfrac{1}{2\pi\, i}\displaystyle\int_C \frac{f(\lambda)}{\lambda-z_k}d\lambda \ \ (k=1,\cdots,n)$ により、

$f(z_k)=g(z_k),\ k=1,\cdots,n$ が成り立つ。以上と差分商の定義から $f(z_1,\cdots,z_n)=g(z_1,\cdots,z_n)$ が従う。

(B) 差分商行列（ここから行列の話になる）

10.1-2 節で学んだ行列関数の **M** 演算の算法によく似た事実が差分商に対しても成立することを示す。差分商は次の表形式で提示されることが多い：

$$\begin{array}{lll}
f(z_1) & & \\
 & f(z_1,z_2) & \\
f(z_2) & & f(z_1,z_2,z_3) \\
 & f(z_2,z_3) & \\
f(z_3) & & f(z_2,z_3,z_4) \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

上の表をいくらか形を変えて次の行列形に書く：

$$\mathbf{D}(f)\equiv\mathbf{D}(f(z_1,\cdots,z_n))=\begin{bmatrix}
f_1 & f_{12} & f_{123} & \cdots\cdots & & f_{12\cdots n} \\
 & f_2 & f_{23} & f_{234} & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
 & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & & f_{n-1} & f_{(n-1)n} \\
\mathbf{0} & & & & & f_n
\end{bmatrix}\quad (\,f_1\equiv f(z_1),\ f_{12}\equiv f(z_1,z_2),\cdots)$$

$\mathbf{D}(f)$ を **D** 演算 D operation と仮に呼び、この右辺を差分商行列と呼ぶことにする。これは 10.1 節で定義した $\mathbf{M}(f)$ と深い関係がある。すなわち、「$z=a$ が考えている領域内に点なら、$z_1,\cdots,z_n\to a$ のとき、

$f(z_1)\to f(a),\ f(z_1,z_2)\to\dfrac{f^{(1)}(a)}{1!},\ \cdots,\ f(z_1,\cdots,z_n)\to\dfrac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$、すなわち、

$\mathbf{D}(f(z_1,\cdots,z_n))\to\mathbf{M}(f(a))$」が成り立つことが知られている。実際、(3)とコーシーの積分公式 $\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}=\dfrac{1}{2\pi\, i}\displaystyle\int_C\frac{f(\lambda)}{(\lambda-a)^{k+1}}d\lambda \ \ (k=0,1,2,\cdots)$

から出るのだが詳細は略する。

例

$$\mathbf{D}(0)=\mathbf{0},\ \mathbf{D}(1)=\mathbf{I},\ \mathbf{D}(z)=\begin{bmatrix} z_1 & 1 & & & \mathbf{0} \\ & z_2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & z_{n-1} & 1 \\ \mathbf{0} & & & & z_n \end{bmatrix}$$

（$\mathbf{D}(z)$ とは $f(z)=z$ のときの $\mathbf{D}(f)$ の意味）

(C)　積の高階差分商に関するライプニッツの法則

f,g を $z_1,\cdots,z_n$ 上で定義された関数とすれば次式が成立することを示せ：

$$(fg)_{12\cdots n}=f_1g_{12\cdots n}+f_{12}g_{23\cdots n}+\cdots+f_{12\cdots n-1}g_{(n-1)n}+f_{12\cdots n}g_n$$

（$f_1=f(z_1),\ f_{12}=f(z_1,z_2),\cdots$）

（略証　厳密には数学的帰納法によるが、まずは $n=2,3$ の場合についてやっておく。記号使いの簡略化のため､以下では"$1-2$"等とは"z_1-z_2"等を意味するものとする（混乱は起らない！）

$n=2$ の場合：

$$\begin{aligned}(1-2)(fg)_{12}&=(fg)_1-(fg)_2=f_1g_1-f_2g_2=f_1g_1+(-f_1g_2+f_1g_2)-f_2g_2\\&=f_1(g_1-g_2)+(f_1-f_2)g_2=(1-2)f_1g_{12}+(1-2)f_{12}g_2\end{aligned}$$

ゆえに　$(fg)_{12}=f_1g_{12}+f_{12}g_2$

$n=3$ の場合：

$(1-3)(fg)_{123}=(fg)_{12}-(fg)_{23}=f_1g_{12}+f_{12}g_2-(f_2g_{23}+f_{23}g_3)$（$n=2$ の場合の結果を利用）

$$\begin{aligned}&=f_1g_{12}+(-f_1g_{23}+f_1g_{23})+f_{12}g_2-f_2g_{23}+(-f_{12}g_3+f_{12}g_3)-f_{23}g_3)\\&=f_1(g_{12}-g_{23})+(f_1-f_2)g_{23}+f_{12}(g_2-g_3)+(f_{12}-f_{23})g_3\\&=(1-3)f_1g_{123}+(1-2)f_{12}g_{23}+(2-3)f_{12}g_{23}+(1-3)f_{123}g_3\\&=(1-3)(f_1g_{123}+f_{12}g_{23}+f_{123}g_3)\end{aligned}$$

ゆえに　$(fg)_{123}=f_1g_{123}+f_{12}g_{23}+f_{123}g_3$

一般化は練習問題とする。■）

(D)　差分商行列 f^+ の算法に関して次式が成立することを示せ：

(a)　$\mathbf{D}(f\pm g)=\mathbf{D}(f)\pm\mathbf{D}(g)$

(b)　$\mathbf{D}(cf)=c\mathbf{D}(f)$（$c$ は定数）

(c)　$\mathbf{D}(fg)=\mathbf{D}(f)\mathbf{D}(g)=\mathbf{D}(g)\mathbf{D}(f)$（積の高階差分商に関するライプニッツの法則）

(d)　$\mathbf{D}(f^{-1})=\mathbf{D}^{-1}(f)$　（$f_1=f(z_1)\neq 0,\cdots,f_n=f(z_n)\neq 0$）

(e)　$\mathbf{D}(f/g)=\mathbf{D}(f)\mathbf{D}^{-1}(g)=\mathbf{D}^{-1}(g)\mathbf{D}(f)$（$g_1=g(z_1)\neq 0,\cdots,g_n=g(z_n)\neq 0$）

（略証：　(a)(b)は簡単。(c)はライプニッツの法則から出る。それ以外は(c)から出る。■）
例　(d)を $f(z)=z$ に適用すると（ただし $z_1,\cdots,z_n\neq 0$）、

$$\begin{bmatrix} z_1 & 1 & & & \mathbf{0} \\ & z_2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & z_{n-1} & 1 \\ \mathbf{0} & & & & z_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} y_1 & -y_1y_2 & y_1y_2y_3 & \cdots & (-1)^{n+1}y_1\cdots y_n \\ & y_2 & -y_2y_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & y_{n-1} & -y_{n-1}y_n \\ \mathbf{0} & & & & y_n \end{bmatrix} (y_k = z_k{}^{-1}, k=1,\cdots,n)$$

ここに、右辺の (p,q) 成分は $(-1)^{p+q}y_p y_{p+1}\cdots y_q$ に等しい（$p\leq q$）。検算して下さい。

(E)　直前の式において $z_k=-x_k$ $(\neq 0,\ k=1,\cdots,n)$ と書き変え、次式を導出せよ（後ほど必要となる）：

$$\begin{bmatrix} x_1 & -1 & & & \mathbf{0} \\ & x_2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & x_{n-1} & -1 \\ \mathbf{0} & & & & x_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} w_1 & w_1w_2 & w_1w_2w_3 & \cdots & w_1\cdots w_n \\ & w_2 & w_2w_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & w_{n-1} & w_{n-1}w_n \\ \mathbf{0} & & & & w_n \end{bmatrix}$$

$(w_k = x_k{}^{-1}, k=1,\cdots,n)$。ここに、右辺の (p,q) 成分は $w_p w_{p+1}\cdots w_q$ に等しい（$p\leq q$）。

(F)　(E)の結果を利用して次式を導け：

$$(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{D}(z))^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda-z_1 & -1 & & & \mathbf{0} \\ & \lambda-z_2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda-z_{n-1} & -1 \\ \mathbf{0} & & & & \lambda-z_n \end{bmatrix}^{-1} \equiv \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots\cdots & p_{1n} \\ & p_{22} & p_{23} & \\ & & \ddots & \ddots \ \vdots \\ & & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & p_{nn} \end{bmatrix}$$

ここに、

$$p_{ij} = \frac{1}{(\lambda-z_i)(\lambda-z_{i+1})\cdots(\lambda-z_j)} \quad (i\leq j)$$

(G)　差分商行列に対するコーシー積分公式

$$\mathbf{D}(f)(z_1,\cdots,z_n) = \frac{1}{2\pi\, i}\int_C f(\lambda)(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{D}(z))^{-1}d\lambda = f(\mathbf{D}(z))$$

を導け。ここに、 $f(\mathbf{D}(z))$ は 10.4 節で定義した行列関数の意味である。

（略証　左辺の (p,q) 成分 $(p \le q)$ は $f(z_p, z_{p+1}, \cdots, z_q)$ に等しい。また中央の積分の (p,q) 成分は、(F)の結果を代入すれば

$\dfrac{1}{2\pi\, i}\displaystyle\int_C \dfrac{f(\lambda)}{(\lambda - z_p)(\lambda - z_{p+1})\cdots(\lambda - z_q)}\,d\lambda$ に等しい。しかし、この積分値は(A)により

$f(z_p, z_{p+1}, \cdots, z_q)$ に等しい。最後の行列 $f(\mathbf{D}(z))$ は 10.4 節により中央のコーシー積分に等しい。■）