レッスン 14　ノルム

このレッスンでは行列解析理解の基礎となる事項を学ぶ。これらは代数と解析の境界領域にある話題であり、行列計算の誤差解析を理解するための基礎知識である。主題は実または複素有限次元ノルム空間上のノルムと線形変換である。このような線形変換の具体例として$m\times n$行列を念頭において頂くのがよい。このレッスンのキーワードは「線形変換の連続性（有界性）」「展開係数の有界性」「有限次元ノルム空間の完備性」「ノルムの同値性」「成分ごとの収束とノルム収束の同値性」「演算子ノルム」「ハーン・バナハの定理」である。

14.1　線形変換の有界性と連続性

この節では線形変換の連続性の同値な定義を学ぶ。これらの事項は次節以降で学ぶ、有限次元ノルム空間とそれらの間の線形変換に関する基礎的な性質を理解する上で必要となる。

(I) ベクトル列の収束　与えられた有限または無限次元ノルム空間 X 内のベクトルの無限列 $\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots\}\equiv\{\mathbf{x}_n\}$ が $\mathbf{a}\in X$ に収束する to converge とは実数列の収束$\|\mathbf{x}_n-\mathbf{a}\|\to 0$をいう。このとき$\mathbf{a}$を列$\{\mathbf{x}_n\}$の極限(または極限値)limit といい、$\mathbf{x}_n\to\mathbf{a}$ または $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{x}_n=\mathbf{a}$ と書く。詳しくいえば、$\mathbf{x}_n\to\mathbf{a}$ とは「任意の$\varepsilon>0$に対して自然数$N(\varepsilon)$を十分大きくとれば$n>N(\varepsilon)$を満たすすべてのnに対して$\|\mathbf{x}_n-\mathbf{a}\|<\varepsilon$となる」ことである。

「極限は存在すればひとつしかない。」実際、$\mathbf{x}_n\to\mathbf{a}$ かつ $\mathbf{x}_n\to\mathbf{b}$ なら、ノルムの性質より $0\le\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|=\|(\mathbf{x}_n-\mathbf{b})-(\mathbf{x}_n-\mathbf{a})\|\le\|\mathbf{x}_n-\mathbf{b}\|+\|\mathbf{x}_n-\mathbf{a}\|\to 0$ であるから、$\|\mathbf{a}-\mathbf{b}\|=0$ すなわち、$\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{0}$でなければならない。

(II) 線形変換の連続性　有限または無限次元ノルム空間 X から同じ体上の第 2 のノルム空間 Y への線形変換$\mathbf{T}$について、次の各主張は互いに同値である：

(1)　(有界性) すべての$\mathbf{x}\in X$ に対して$\|\mathbf{T}\mathbf{x}\|\le M\|\mathbf{x}\|$を満たすような正定数$M$が存在する（ここに$\|\mathbf{x}\|$は$X$ 上のノルム、$\|\mathbf{T}\mathbf{x}\|$はY 上のノルムを表す）このような$\mathbf{T}$は有界である bounded という。

(2)　（$\mathbf{x}=\mathbf{0}$における連続性）任意に与えられた$\varepsilon>0$に対して$\delta>0$を十分小さくとれば、$\|\mathbf{x}\|<\delta$を満たすすべての$\mathbf{x}\in X$ に対して$\|\mathbf{T}\mathbf{x}\|<\varepsilon$が成り立つ。このような$\mathbf{T}$は$\mathbf{x}=\mathbf{0}$において連続であるという。

(3)　（$\mathbf{x}=\mathbf{0}$ における連続性）$\mathbf{x}_n \to \mathbf{0}$ ならかならず $\mathbf{T}\mathbf{x}_n \to \mathbf{0}$ が成り立つ。

証明　(1)→(2)→(3)→(1)を示す。

(1)→(2)　$\|\mathbf{x}\| < \varepsilon / M \equiv \delta$ とすれば、(1)により $\|\mathbf{T}\mathbf{x}\| \le M\|\mathbf{x}\| < M\varepsilon / M = \varepsilon$

(2)→(3)　$\mathbf{x}_n \to \mathbf{0}$ とする。このとき $\{\mathbf{T}\mathbf{x}_n\}$ が $\mathbf{0}$ に収束しないとすれば、適当な $\varepsilon_0 > 0$ と適当な自然数の列 $n_1 < n_2 < \cdots$ をとれば、$\|\mathbf{T}\mathbf{x}_n\| \ge \varepsilon_0$（$n = n_1 < n_2 < \cdots$）が成立するはずである。(2)により、$\|\mathbf{x}\| < \delta_0$ ならかならず $\|\mathbf{T}\mathbf{x}\| < \varepsilon_0$ となるような $\delta_0 > 0$ がとれるはずである。$\mathbf{x}_n \to \mathbf{0}$ ゆえ、ある番号から先の $\mathbf{x}_n$ はすべて $\|\mathbf{x}_n\| < \delta_0$ を満たし、$\|\mathbf{T}\mathbf{x}_n\| < \varepsilon_0$ が無限に多くの $n = n_k$ の値に対して満たされなければならない。しかしこれは $\|\mathbf{T}\mathbf{x}_n\| \ge \varepsilon_0$（$n = n_1 < n_2 < \cdots$）と矛盾する。

(3)→(1)　(1)が真でなければ(3)も真でないことを示せばよい。実際、(1)が真でなければ、すべての自然数 n に対して $\|\mathbf{T}\mathbf{x}_n\| > n\|\mathbf{x}_n\|$、すなわち、$\left\|\mathbf{T}\dfrac{\mathbf{x}_n}{n\|\mathbf{x}_n\|}\right\| > 1$ を満たす $\mathbf{x}_n$ がとれるはずである。$\mathbf{y}_n = \dfrac{\mathbf{x}_n}{n\|\mathbf{x}_n\|}$ とおけば、$\|\mathbf{y}_n\| = 1/n \to 0$、すなわち、$\mathbf{y}_n \to \mathbf{0}$。しかし $\|\mathbf{T}\mathbf{y}_n\| > 1$ ゆえ、$\mathbf{T}\mathbf{y}_n \to \mathbf{0}$ は真ではあり得ない。■

(III)　(II) の各項はさらに以下の各項と同値である（証明は練習問題とする）:

(4)　（一様連続性）$\mathbf{a} \in X$ を任意かつ特定の一点とすれば、任意 $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ を十分小さくとれば、$\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < \delta$ を満たすすべての $\mathbf{x} \in X$ に対して $\|\mathbf{T}\mathbf{x}-\mathbf{T}\mathbf{a}\| < \varepsilon$ が成り立つ。

ここに δ は ε のみに関係し、特定の $\mathbf{a}$ には依存しない。

(5)　$\mathbf{a} \in X$ を任意かつ特定の一点とすれば、$\mathbf{x}_n \to \mathbf{a}$ は $\mathbf{T}\mathbf{x}_n \to \mathbf{T}\mathbf{a}$ を意味する。

以上を総合するとこういえる:「ノルム空間 X より Y への線形変換 $\mathbf{T}$ が有界または X 内の任意かつ特定の 1 点で連続なら X 上で一様連続である」「有界性と連続性は同値である」。

この節を終える前に今後の議論によく出てくる次の 3 種の集合を定義しておく:

「点 $\mathbf{a}$ を中心とする半径 $r > 0$ の開球 open sphere」$\{\mathbf{x} \in X : \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < r\}$、

「点 $\mathbf{a}$ を中心とする半径 $r > 0$ の閉球 closed sphere」$\{\mathbf{x} \in X : \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| \le r\}$、

「点 $\mathbf{a}$ を中心とする半径 $r > 0$ の球の表面 surface」$\{\mathbf{x} \in X : \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| = r\}$

14.2　展開係数の有界性

本節で学ぶ「(線形変換としての) 展開係数の有界性」は、有限次元ノルム空間の基本的性質を導く上でもっとも直接的で使いやすい事実である。実際、次節以降で順次示すように

「有限次元ノルム空間内のコーシー列は収束する」(完備性)

「有限次元ノルム空間内の有界列は収束する部分列を含む」(完備性)

「有限次元ノルム空間上の 2 種のノルムは同値である」(ノルムの同値性)

「有限次元ノルム空間上の線形変換は連続である」(連続性、有界性)

などの諸事実はすべて本節の事実から出てくる。

本節で示すのは次の事実である：

「Y を与えられた n 次元ノルム空間、$\{\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_n\}$ を Y の基底、任意ベクトル $\mathbf{y}\in Y$ をこの基底で展開したものを $\mathbf{y}=g_1(\mathbf{y})\mathbf{b}_1+\cdots+g_n(\mathbf{y})\mathbf{b}_n$ とすれば、適当な正定数 α,β に対して

(1)　$\alpha\|\mathbf{y}\|\le|g_1(\mathbf{y})|+\cdots+|g_n(\mathbf{y})|\le\beta\|\mathbf{y}\|$

がすべての $\mathbf{y}\in Y$ に対して成り立つ。ここに展開係数 $g_1(\mathbf{y}),\cdots,g_n(\mathbf{y})$ は、それぞれ、Y からスカラー体への線形変換 (すなわち、線形汎関数 linear functional) を表し、$|g_1(\mathbf{y})|+\cdots+|g_n(\mathbf{y})|$ 自体 Y 上のノルムを表す。」

証明「$g_1(\mathbf{y}),\cdots,g_n(\mathbf{y})$ のそれぞれは Y からスカラー体への線形変換を表し、$\|\mathbf{y}\|'\equiv|g_1(\mathbf{y})|+\cdots+|g_n(\mathbf{y})|$ は Y 上の一つのノルムを表す」ことの証明は練習問題とする。

さて、$\mathbf{y}=g_1(\mathbf{y})\mathbf{b}_1+\cdots+g_n(\mathbf{y})\mathbf{b}_n$ のノルムをとれば、

(2)　$\|\mathbf{y}\|\le|g_1(\mathbf{y})|\|\mathbf{b}_1\|+\cdots+|g_n(\mathbf{y})|\|\mathbf{b}_n\|\le(|g_1(\mathbf{y})|+\cdots+|g_n(\mathbf{y})|)\max\{\|\mathbf{b}_1\|,\cdots,\|\mathbf{b}_n\|\}$

となる。$\alpha=1/\max\{\|\mathbf{b}_1\|,\cdots,\|\mathbf{b}_n\|\}$ とおけば、(1)の前半が出る。ここに α は基底 $\{\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_n\}$ と Y 上のノルム $\|\cdot\|$ には依存するが、$\mathbf{y}$ にはまったく依存しないことは明らかである。

不等式後半の証明に入る。証明はやや入り組んでいるが、必要となる解析学上の予備知識は実数および複素数の完備性だけである。さて、$X=\mathbf{R}^{n\times1}$ (または $\mathbf{C}^{n\times1}$) とすれば、変換 $\mathbf{T}$ ：

(3)　$\mathbf{Tx}=\mathbf{T}\left[x_1\cdots x_n\right]^T=x_1\mathbf{b}_1+\cdots+x_n\mathbf{b}_n$

は X より Y 上への 1 対 1 線形変換を表す。ゆえに $\mathbf{T}^{-1}$ も Y より X 上への 1 対 1 線形変換を表す。X 上に 1-ノルムを与え、$S=\{\mathbf{x}\in X:\|\mathbf{x}\|_1=1\}$ (X の単位球の表面) とすれば、

(4)　十分小さな $\delta>0$ をとれば、すべての $\mathbf{x}\in S$ に対して $\|\mathbf{Tx}\|\ge\delta$

が真であることを示す。実際、(4)を否定すれば任意の自然数kに対して$\|\mathbf{Tx}_k\| < 1/k$（$\|\mathbf{x}_k\|_1 = 1$）

を満たすS上のベクトル列$\{\mathbf{x}_k\}$がとれるはずである。これより$\|\mathbf{Tx}_k\| \to 0$。他方、$\{\mathbf{x}_k\}$は有界列だから、収束する部分列$\{\mathbf{x}_k\}$（$k = n_1, n_2, \cdots \to \infty$）を含む（∵ $\{\mathbf{x}_k\}$の第 1 成分の列から収束列を抽出し、それに対応する第 2 成分の列から収束列を抽出し、・・を繰り返せばよい)。その極限を$\mathbf{x}^{(0)}$と書けば$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^{(0)}\|_1 \to 0$（$k = n_1, n_2, \cdots$）。そこで、$\mathbf{x}^{(k)} \equiv \left[x_1^{(k)} \cdots x_n^{(k)} \right]^T$、

$\mathbf{x}^{(0)} = \left[x_1^{(0)} \cdots x_n^{(0)} \right]^T$と書けば、

$$\left| \|\mathbf{Tx}_k\| - \|\mathbf{Tx}^{(0)}\| \right| \le \|\mathbf{Tx}_k - \mathbf{Tx}^{(0)}\| = \|\mathbf{T}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^{(0)})\| = \|(x_1^{(k)} - x_1^{(0)})\mathbf{b}_1 + \cdots + (x_n^{(k)} - x_n^{(0)})\mathbf{b}_n\|$$

$$\le \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^{(0)}\|_1 \max\{\|\mathbf{b}_1\|, \cdots, \|\mathbf{b}_n\|\} \to 0 \quad (k = n_1, n_2, \cdots)$$

ところが仮定により、$\|\mathbf{Tx}_k\| \to 0$である。ゆえに$\mathbf{Tx}^{(0)} = \mathbf{0}$。これは$\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$を意味する。すると、$1 = \left|1 - \|\mathbf{x}^{(0)}\|_1\right| = \left| \|\mathbf{x}_k\|_1 - \|\mathbf{x}^{(0)}\|_1 \right| \le \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^{(0)}\|_1 \to 0$。ゆえに$\|\mathbf{x}^{(0)}\|_1 = 1$。これは矛盾である。ゆえに主張(4)は真でなければならない。

つぎに(4)を成立させる$\delta > 0$に対して

(5)　$\|\mathbf{y}\| < \delta$を満たすすべての$\mathbf{y} \in Y$に対して$\|\mathbf{T}^{-1}\mathbf{y}\|_1 = |g_1(\mathbf{y})| + \cdots + |g_n(\mathbf{y})| < 1$

が成立することを示す。かりに$\|\mathbf{y}_0\| < \delta$にもかかわらず$\|\mathbf{T}^{-1}\mathbf{y}_0\| \ge 1$となるような$\mathbf{y}_0 \in Y$が存在したとする。$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0$とおけば$\mathbf{Tx}_0 = \mathbf{y}_0$かつ$\|\mathbf{x}_0\| \ge 1$ゆえ、

$$\left\| \mathbf{T} \frac{\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_0\|_1} \right\| = \frac{\|\mathbf{Tx}_0\|}{\|\mathbf{x}_0\|_1} = \frac{\|\mathbf{y}_0\|}{\|\mathbf{x}_0\|_1} < \frac{\delta}{1} = \delta$$ となる。これは(4)と矛盾する（∵ $\mathbf{x}_0 / \|\mathbf{x}_0\|_1 \in S$）。ゆえに(5)は真でなければならない。(5)は

(6)　すべての$\mathbf{y} \in Y$に対して$|g_1(\mathbf{y})| + \cdots + |g_n(\mathbf{y})| \le (1/\delta)\|\mathbf{y}\|$

が成り立つことを意味する。これは証明すべき(1)の後半に他ならない。■

14.3　有限次元ノルム空間内のコーシー列は収束する

この節では前節の結果を応用し、

「有限次元ノルム空間内のコーシー列は収束する」

ことを示す。ここにノルム空間内の列$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots\} \equiv \{\mathbf{x}_k\}$がコーシー列 Cauchy sequence であるとは、どんな小さな$\varepsilon > 0$を与えても自然数$n(\varepsilon)$を十分大きくとれば、$p, q > n(\varepsilon)$を満たすすべての自然数p, qに対して$\left\|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_q\right\| < \varepsilon$が成り立つことをいう。

証明　与えられた有限次元ノルム空間をX、$\dim X = n > 0$、$\{\mathbf{x}_k\}$をX内のコーシー列とする。Xの基底$\{\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n\}$を一つとり、$\mathbf{x}_k = x_1^{(k)}\mathbf{b}_1 + \cdots + x_n^{(k)}\mathbf{b}_n$（$k = 1, 2, \cdots$）と書けば、任意の自然数$p, q$に対して、

$$\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_q = (x_1^{(p)} - x_1^{(q)})\mathbf{b}_1 + \cdots + (x_n^{(p)} - x_n^{(q)})\mathbf{b}_n$$

前節の結果を適用すると適当な正定数βに対して

$$\left|x_1^{(p)} - x_1^{(q)}\right| + \cdots + \left|x_n^{(p)} - x_n^{(q)}\right| \le \beta\left\|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_q\right\|$$

が成り立つはずである。これは各成分の列$\{x_1^{(k)}\}, \cdots, \{x_n^{(k)}\}$が実数または複素数のコーシー列を表すことを示す。ゆえにこれらの各列は収束し、$x_1^{(k)} \to x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(k)} \to x_n^{(0)}$とすれば、$\mathbf{x}_k$の展開形から$\mathbf{x}_k \to x_1^{(0)}\mathbf{b}_1 + \cdots + x_n^{(0)}\mathbf{b}_n$となることは明らかである。■

14.4　有限次元ノルム空間内の有界列は収束する部分列を含む

この節では 14.2 節の応用例として、列コンパクト性 sequential compactness：

「有限次元ノルム空間内の有界列は収束する部分列を含む」

を示す。

証明　問題の有限次元ノルム空間をXとし、$\dim X = n (> 0)$とする。いま、$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots\} \equiv \{\mathbf{x}_k\}$を任意の有界列、すなわち、適当な正定数$\alpha$に対して$\left\|\mathbf{x}_k\right\| \le \alpha$（$k = 1, 2, \cdots$）を満たすようなベクトル列、とする。$X$の基底$\{\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n\}$を一つとり、任意の$\mathbf{x}_k$をこの基底で展開したものを$\mathbf{x}_k = x_1^{(k)}\mathbf{b}_1 + \cdots + x_n^{(k)}\mathbf{b}_n$（$k = 1, 2, \cdots$）とする。すると、展開係数の有界性（14.2 節）より$\left|x_1^{(k)}\right| + \cdots + \left|x_n^{(k)}\right| \le \beta\left\|\mathbf{x}_k\right\| \le \beta\alpha$（$k = 1, 2, \cdots$）を満たす正定数$\beta$が存在する。各列$\{x_k^{(1)}\}, \cdots, \{x_k^{(n)}\}$は有界数列ゆえ、$x_1^{(k)} \to x_1^{(0)}, \cdots, x_n^{(k)} \to x_n^{(0)}$ $(k = n_1, n_2, \cdots)$となるような自然数の部分列$n_1 < n_2 < \cdots$がとれる。ゆえに対応する$\{\mathbf{x}_k\}$の部分列は

$x_1^{(0)}\mathbf{b}_1+\cdots+x_n^{(0)}\mathbf{b}_n$ に収束する。■

14.5　有限次元ノルム空間上のノルムはどの 2 つも同値である

14.2 節の結果の応用として以下(I)(II)(III)を証明する：

(I) $\|\cdot\|$ と $\|\cdot\|'$ を同じ n 次元ノルム空間 X 上の 2 種のノルムとすれば、すべての $\mathbf{x}\in X$ に対して $\alpha\|\mathbf{x}\|\le\|\mathbf{x}\|'\le\beta\|\mathbf{x}\|$ が成り立つような正定数 α,β が存在する。これをノルムの同値性 equivalence という。

(II) 与えられたベクトル列 $\{\mathbf{x}_k\}$ に対して $\|\mathbf{x}_k-\mathbf{a}\|\to 0$ が成立すれば、$\|\mathbf{x}_k-\mathbf{a}\|'\to 0$ も成り立つ。すなわち、X 内のベクトル列が一つのノルムに関して収束すれば、他のすべてのノルムに関して同一の極限に収束する。

(III)　いま、$\{\mathbf{x}_k\}$ を X 内のベクトル列、$\{\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_n\}$ を X の任意の基底とすれば、X 上の任意かつ特定のノルム $\|\cdot\|$ に関する収束 $\|\mathbf{x}_k-\mathbf{a}\|\to 0$ と成分ごとの収束 componentwise convergence $x_1^{(k)}\to a_1,\cdots,x_n^{(k)}\to a_n$ とは同値である。ここに $\mathbf{x}_k=x_1^{(k)}\mathbf{b}_1+\cdots+x_n^{(k)}\mathbf{b}_n$、$\mathbf{a}=a_1\mathbf{b}_1+\cdots+a_n\mathbf{b}_n$ としている。

証明　(I) $\{\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_n\}$ を X の基底とし、任意の $\mathbf{x}\in X$ をこの基底で展開したものを

(*)　$\mathbf{x}=x_1\mathbf{a}_1+\cdots+x_n\mathbf{a}_n$ とする。14.2 節の結果を適用すれば、すべての $\mathbf{x}\in X$ に対して $|x_1|+\cdots+|x_n|\le c\|\mathbf{x}\|$ を成立させるような正定数 c が存在する。一方(*)の $\|\cdot\|'$-ノルムをとれば $\|\mathbf{x}\|'\le\max\{\|\mathbf{a}_1\|',\cdots,\|\mathbf{a}_n\|'\}(|x_1|+\cdots+|x_n|)\equiv c'(|x_1|+\cdots+|x_n|)\le c'c\|\mathbf{x}\|\equiv\beta\|\mathbf{x}\|$ が出る。両ノルムの役割を交換すれば適当な正定数 c'' に対して $\|\mathbf{x}\|\le c''\|\mathbf{x}\|'$ がすべて $\mathbf{x}\in X$ に対して成り立つことがわかる。ゆえに、$1/c''=\alpha$ とおけば、$\alpha\|\mathbf{x}\|\le\|\mathbf{x}\|'\le\beta\|\mathbf{x}\|$ がすべての $\mathbf{x}\in X$ に対して成り立つ。

(II)　(I)から簡単に従う。

(III)　練習問題とする。■

例 1　$\mathbf{R}^{n\times 1}$（または $\mathbf{C}^{n\times 1}$）上の $1,2,\infty$-ノルム、

$$\|\mathbf{x}\|_1\equiv|x_1|+\cdots+|x_n|、\|\mathbf{x}\|_2\equiv(|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2)^{1/2}、\|\mathbf{x}\|_\infty\equiv\max_i|x_i|$$

に対して次の不等式が成り立つ（ここに、$\mathbf{x}=\left[x_1,\cdots,x_n\right]^T$）：

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\|_1 \le n\|\mathbf{x}\|_\infty、\quad \|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\|_2 \le \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_\infty、\quad \|\mathbf{x}\|_2 \le \|\mathbf{x}\|_1 \le \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_2$$

最初二つの不等式は簡単に証明できる。最後の不等式中の $\|\mathbf{x}\|_2^{\,2} \le \|\mathbf{x}\|_1^{\,2}$ は明らか。また、

$n\|\mathbf{x}\|_2^{\,2}-\|\mathbf{x}\|_1^{\,2}=\sum_{i<j}(|x_i|-|x_j|)^2 \ge 0$ より $\|\mathbf{x}\|_1 \le \sqrt{n}\,\|\mathbf{x}\|_2$ が従う。

例 2　本節の結果(III)により、$\mathbf{R}^{n\times1}$（または $\mathbf{C}^{n\times1}$）上の任意のノルムに関する収束 $\|\mathbf{x}_k-\mathbf{a}\|\to 0$

と成分ごとの収束 $x_1^{(k)}\to a_1,\cdots,x_n^{(k)}\to a_n$ とは同値であることがわかる。ここに

$\mathbf{x}_k=\left[x_1^{(k)}\cdots x_n^{(k)}\right]^T$, $\mathbf{a}=\left[a_1\cdots a_n\right]^T$ としている。■

14.6　有限次元ノルム空間上の線形変換

14.2 節からの応用として次の事実を示す：

(I)（有界性）n 次元ノルム空間 X から有限または無限次元ノルム空間 Y への線形変換 $\mathbf{T}$ は有界である。

(II)　n 次元ノルム空間 X から有限または無限次元ノルム空間 Y への任意の線形変換 $\mathbf{T}$ に対して、$\|\mathbf{x}_0\|=1$ かつ $\sup\{\|\mathbf{Tx}\|:\|\mathbf{x}\|=1\}=\|\mathbf{Tx}_0\|$ を満たす $\mathbf{x}_0\in X$ が存在する。ゆえに

$\sup\{\|\mathbf{Tx}\|:\|\mathbf{x}\|=1\}=\max\{\|\mathbf{Tx}\|:\|\mathbf{x}\|=1\}$ と書いてよい。

証明　(I) $\{\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_n\}$ を X の基底とし、$\mathbf{x}\in X$ をこの基底によって展開し

$\mathbf{x}=x_1\mathbf{b}_1+\cdots+x_n\mathbf{b}_n$ とすれば、14.2 節により $|x_1|+\cdots+|x_n|\le\beta\|\mathbf{x}\|$ を満たす正定数 β が存在し、

$\|\mathbf{Tx}\|=\|x_1\mathbf{Tb}_1+\cdots+x_n\mathbf{Tb}_n\|\le\gamma(|x_1|++|x_n|)\le\gamma\beta\|\mathbf{x}\|$（$\gamma\equiv\max\{\|\mathbf{Tb}_1\|,\cdots,\|\mathbf{Tb}_n\|\}$）

(II) (I)により集合 $\{\|\mathbf{Tx}\|:\|\mathbf{x}\|=1\}\equiv S_1$ は実数の有界集合を表す。ゆえに実数の完備性により、

$\sup S_1\equiv\alpha$ は確かに存在する。すると、各自然数 k に対して $\alpha-(1/k)<\|\mathbf{Tx}_k\|\le\alpha$ かつ

$\|\mathbf{x}_k\|=1$ を満たすベクトル列 $\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots\}$ がとれる。$\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots\}$ は有限次元空間 X 内の有界列を表すから 14.5 節の結果により収束する部分列 $\{\mathbf{x}_k\}$（$k=n_1<n_2<\cdots$）をもつ。極限を $\mathbf{x}_0$ とす

れば$\left|1-\|\mathbf{x}_0\|\right|=\left|\|\mathbf{x}_k\|-\|\mathbf{x}_0\|\right|\le\|\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_0\|\to 0$（$k=n_1,n_2,\cdots$）ゆえ、$\|\mathbf{x}_0\|=1$である。しかも同じ部分列に対して$\mathbf{T}\mathbf{x}_k\to\mathbf{T}\mathbf{x}_0$。ゆえに$\|\mathbf{T}\mathbf{x}_k\|\to\|\mathbf{T}\mathbf{x}_0\|$。他方、$\|\mathbf{T}\mathbf{x}_k\|\to\alpha$は明らか。極限の一意性より$\|\mathbf{T}\mathbf{x}_0\|=\alpha=\sup\{\|\mathbf{T}\mathbf{x}\|:\|\mathbf{x}\|=1\}$。■

14.7　演算子ノルム

いま、$\mathbf{T}$を有限または無限次元ノルム空間Xから同じ体上の有限または無限次元ノルム空間Yへの有界線形変換とする。次の量$\|\mathbf{T}\|$を$\mathbf{T}$の<u>演算子ノルム operator norm</u> という：

(1)　$$\|\mathbf{T}\|=\sup_{\|\mathbf{x}\|=1}\|\mathbf{T}\mathbf{x}\|=\sup_{\|\mathbf{x}\|\le 1}\|\mathbf{T}\mathbf{x}\|=\inf\{K\ge 0:\|\mathbf{T}\mathbf{x}\|\le K\|\mathbf{x}\|\}$$

ここに最後の量はすべての$\mathbf{x}\in X$に対して$\|\mathbf{T}\mathbf{x}\|\le K\|\mathbf{x}\|$が真であるような$K$の値全体の下限を表す。(1)中の等号成立の証明は練習問題とする。ゆえに、$\|\mathbf{T}\|$とは$\mathbf{x}\in X$が単位球の表面上（または単位閉球内）をくまなく動いたときの$\|\mathbf{T}\mathbf{x}\|$の値の上限を表す。とくにXが有限次元なら sup 記号は max 記号で置換可能であることは前節において証明済みである。(1)式が実際にノルムを定義していることは（すなわち、ノルムの公理を満たす）ことは次節において示す。

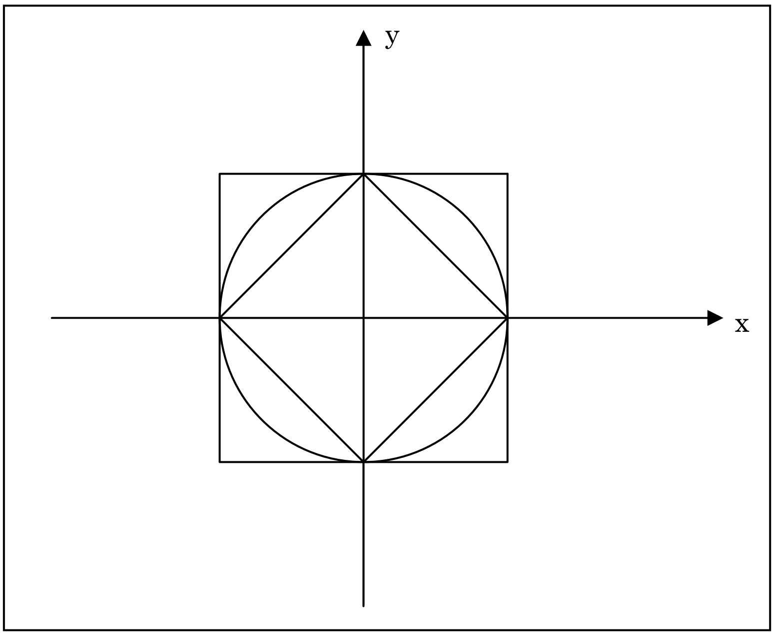
例 1 (I)　$\mathbf{R}^{n\times1}$（または$\mathbf{C}^{n\times1}$）上のノルム

$$\|\mathbf{x}\|_1\equiv|x_1|+\cdots+|x_n|、\|\mathbf{x}\|_2\equiv(|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2)^{1/2}、\|\mathbf{x}\|_\infty\equiv\max_i|x_i|\quad(\mathbf{x}=[x_1\cdots x_n]^T\in\mathbf{R}^{n\times1})$$

は使いやすいノルムとして実務計算上重要であるが、$\|\mathbf{x}\|_p\equiv(|x_1|^p+\cdots+|x_n|^p)^{1/p}$（$p\ge1$）もノルムを表すことが知られている（「腕試し問題」参照）。例を挙げると、$\mathbf{x}=[1\ \ -i]^T$なら

$$\|\mathbf{x}\|_1=|1|+|-i|=2、\|\mathbf{x}\|_2=(|1|^2+|-i|^2)^{1/2}=\sqrt{2}、\|\mathbf{x}\|_\infty=\max\{|1|,|-i|\}=1$$

参考のため、$\mathbf{R}^{2\times1}$における原点を中心とする単位閉球の表面の図を付す：



（上図の説明）平面は $\mathbf{R}^{2\times 1}$ を現す。一番外側の正方形は $\left\|\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right\|_\infty = \max\{|x|,|y|\} = 1$ のグラフの中間の円は $\left\|\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right\|_2 = (|x|^2 + |y|^2)^{1/2} = 1$ のグラフ、一番内側の菱形は $\left\|\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right\|_1 = |x| + |y| = 1$ のグラフを表す。

$1, \infty, 2$ -ベクトルノルム対応する $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right] \in \mathbf{C}^{m\times n}$ の演算子ノルムは次式によって与えられる：

(a) $\|\mathbf{A}\|_1 \equiv \sup_{\|\mathbf{x}\|_1=1} \|\mathbf{Ax}\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$ （“最大列和ノルム”）

(b) $\|\mathbf{A}\|_\infty \equiv \sup_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1} \|\mathbf{Ax}\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ （“最大行和ノルム”）

(c) $\|\mathbf{A}\|_2 \equiv \sup_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|\mathbf{Ax}\|_2 = \sigma_{\max}(\mathbf{A}) =$「$\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ の最大固有値の平方根」（“最大特異値ノルム”）

証明 (a) $\alpha \equiv \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| = \sum_{i=1}^{m} |a_{ik}|$ とする。簡単な計算で $\|\mathbf{Ax}\|_1 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}x_j| \le \alpha \|\mathbf{x}\|_1$ が出る（$\mathbf{x} = [x_1 \cdots x_n]^T \in \mathbf{C}^{n\times 1}$）。これより $\|\mathbf{A}\|_1 \le \alpha$ 。とくに $\mathbf{x} = \mathbf{e}_k$ ＝第 k 単位ベクトルをとれば $\|\mathbf{e}_k\|_1 = 1$ かつ $\|\mathbf{Ae}_k\|_1 = \alpha$ が成り立つ。ゆえに $\|\mathbf{A}\|_1 \ge \alpha$ 。

(b) $\beta \equiv \max_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| = \sum_{j=1}^{n}|a_{kj}|$ とする。すると簡単に $\|\mathbf{Ax}\|_\infty = \max_{1\le i\le m}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \le \beta\|\mathbf{x}\|_\infty$ が従う（$\mathbf{x} = [x_1 \cdots x_n]^T \in \mathbf{C}^{n\times 1}$）。これより $\|\mathbf{A}\|_\infty \le \beta$。とくに $\mathbf{x}$ として、$x_j = \overline{a_{kj}}/|a_{kj}|\ (a_{kj}\ne 0)$、$x_j = 1\ (a_{kj}=0)$、によって定義されるベクトルをとれば $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$ かつ $\|\mathbf{Ax}\|_\infty = \beta$ が成り立つ。ゆえに $\|\mathbf{A}\|_\infty \ge \beta$。

(c)　レッスン 11 から、$\mathbf{A}$ の特異値分解を $\mathbf{U}^*\mathbf{AV} = \Sigma$（$\mathbf{U}$ ：m 次ユニタリ行列、$\mathbf{V}$ ：n 次ユニタリ行列、$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \mathbf{0} \\ & \sigma_2 & \\ \mathbf{0} & & \ddots \end{bmatrix}$ $(\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \cdots \ge 0)$）とすれば、$\|\mathbf{Av}\|_2 \le \sigma_1\ (\|\mathbf{v}\|_2 = 1)$ かつ $\|\mathbf{Av}_1\|_2 = \sigma_1\ (\|\mathbf{v}_1\|_2 = 1)$ となっている。ここ $\mathbf{v}_1$ は $\mathbf{V}$ の第 1 列を表す。■

一言注意すると、$\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m\times n}$ の場合、$X = \mathbf{R}^{n\times 1}, Y = \mathbf{R}^{m\times 1}$ としも、(a)(b)(c)はそのままの形で成り立つ。すなわち、実行列の演算子ノルムの値はそれを実空間間の変換と考えても、複素空間間の変換と見なしても同じ値となる。これはベクトルノルム $\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$、$\|\cdot\|_\infty$ が<u>絶対ノルム</u> <u>absolute norm</u> を表す、すなわち $\|\,|\mathbf{x}|\,\| = \|\mathbf{x}\|$（ここに $|\mathbf{x}|$ は $\mathbf{x}$ の各成分をその絶対値で置き換えたものを表す）を満たすことに起因する。また、$\mathbf{x} = [x_1, \cdots, x_n]^T$ 自体を $X = \mathbf{C}^{1\times 1}$ より $Y = \mathbf{C}^{n\times 1}$ への変換とみなせば、演算子ノルム $\|\mathbf{x}\|_{1,1}$、$\|\mathbf{x}\|_{2,2}$、$\|\mathbf{x}\|_{\infty,\infty}$ は、それぞれ、ベクトルノルム $\|\mathbf{x}\|_1$、$\|\mathbf{x}\|_2$、$\|\mathbf{x}\|_\infty$ と全く同一となる。■

例 2　与えられた自然数 m, n に対して $\mathbf{R}^{m\times n}$ または $\mathbf{C}^{m\times n}$ は mn 次元ベクトル空間を作る。明らかに $\{\mathbf{B}_{11}, \cdots, \mathbf{B}_{pq}, \cdots \mathbf{B}_{mn}\}$ は基底の一例である。ただし、$\mathbf{B}_{pq}$ は $(\mathbf{B}_{pq})_{ij} = 1$（$(i,j) = (p,q)$ のとき）、$(\mathbf{B}_{pq})_{ij} = 0$（それ以外のとき）とする。そして $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ に対して

$$\|\mathbf{A}\|_{(1)} \equiv \sum_{i,j=1}^{m,n}|a_{ij}|,\ \|\mathbf{A}\|_F \equiv (\sum_{i,j=1}^{m,n}|a_{ij}|^2)^{1/2},\ \|\mathbf{A}\|_{(\infty)} \equiv \max_{i,j}|a_{ij}|$$

はすべて $\mathbf{R}^{m\times n}$ または $\mathbf{C}^{m\times n}$ 上のノルムを表す。とくに $\|\cdot\|_F$ はフロベニウス・ノルム Frobenius norm と呼ばれ、実務計算によく使われる。これはベクトルノルムの単純な拡張に過ぎない。これらはすべて同値であるから（14.5 節)、「与えられた行列の列 $\{\mathbf{A}_k\}$ の任意かつ特定の行列ノルム $\|\cdot\|$ に関する収束 $\|\mathbf{A}_k-\mathbf{A}\|\to 0$ と成分ごとの収束 $a_{ij}{}^{(k)}\to a_{ij}(i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n)$ とは同値である」■

14.8　演算子ノルムの性質

演算子ノルムは応用上多用される。この節では演算子ノルムの重要な性質を学ぶ。

(I) $\mathbf{A},\mathbf{B}$ を有限次元ノルム空間 X からノルム空間 Y への線形変換とし、与えられたベクトルノルム $\|\cdot\|$ に対応する演算子ノルムを同じ記号 $\|\cdot\|$ で表せば、次の関係が成り立つ：

(1)　$\|\mathbf{A}\|\ge 0;\ \|\mathbf{A}\|=0\leftrightarrow \mathbf{A}=\mathbf{0}$

(2)　$\|c\mathbf{A}\|=|c|\cdot\|\mathbf{A}\|$（$c$ は任意のスカラーを表す)

(3)　$\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\|\le\|\mathbf{A}\|+\|\mathbf{B}\|$

(4)　$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|\le\|\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{x}\|$（$\mathbf{x}\in X$）

(1)(2)(3)は演算子ノルムが実際にノルムの公理を満たすことを示す。

(II)　X,Y,Z をノルム空間とし、X,Y は有限次元とする。$\mathbf{B}:X\to Y,\ \mathbf{A}:Y\to Z$ を線形変換とすれば

(5)　$\|\mathbf{AB}\|\le\|\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{B}\|$

(III) $\mathbf{A}$ を有限次元ノルム空間 X からそれ自身への線形変換とすれば、$\mathbf{A}$ の任意の固有値 λ に対して $|\lambda|\le\|\mathbf{A}\|$ が成り立つ。ここに $\|\mathbf{A}\|$ は X 上の任意のベクトルノルムに対応する演算子ノルムを表す。 また $\mathbf{A}$ の固有値とは $\mathbf{A}$ の（任意の）行列表現の固有値を表す(これは行列表現によらない量を表す)。

(IV) $\mathbf{B}$ を有限次元ノルム空間 X からそれ自身への線形変換とする。このとき $\|\mathbf{B}\|<1$ なら

$(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}$ が存在し、$\|(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\|\le(1-\|\mathbf{B}\|)^{-1}$ および $\|(\mathbf{I}+\mathbf{B})^{-1}-\mathbf{I}\|\le\|\mathbf{B}\|/(1-\|\mathbf{B}\|)$ が成り立つ。

ここに$\|\cdot\|$は演算子ノルムを表す。

証明：(I) (1) 定義より$\|\mathbf{A}\| \geq 0$は明らか。$\mathbf{A}=\mathbf{0}$なら当然$\|\mathbf{A}\|=0$である。逆に、$\|\mathbf{A}\|=0$なら演算子ノルムの定義より、すべての$\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$に対して$\|\mathbf{A}(\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|)\|=0$が成り立つはずである。これはベクトルノルムの性質より、すべての$\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$に対して$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$であること、すなわち、$\mathbf{A}=\mathbf{0}$を表す。

(2) これも演算子ノルムの定義から直ちに従う。

(3) 任意の$\mathbf{x}\in X$（$\|\mathbf{x}\|=1$）に対して、$\|(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{x}\|=\|\mathbf{Ax}+\mathbf{Bx}\|\leq\|\mathbf{Ax}\|+\|\mathbf{Bx}\|\leq\|\mathbf{A}\|+\|\mathbf{B}\|$。ここで$\|\mathbf{x}\|=1$を満たすすべての$\mathbf{x}$について sup をとれば$\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\|\leq\|\mathbf{A}\|+\|\mathbf{B}\|$が得られる。

(4) $\mathbf{x}=\mathbf{0}$の場合は問題の不等式は明らかに成り立つ。$\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$なら$\|\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|\|=1$ゆえ、$\|\mathbf{A}(\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|)\|\leq\|\mathbf{A}\|$が成り立つはずである。これより$\|\mathbf{Ax}\|\leq\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|$が出る。

(II) 任意の$\mathbf{x}\in X$（$\|\mathbf{x}\|=1$）に対して、(I)(4)により$\|\mathbf{ABx}\|=\|\mathbf{A}(\mathbf{Bx})\|\leq\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{Bx}\|\leq\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|$。ここで$\|\mathbf{x}\|=1$を満たすすべての$\mathbf{x}$に対して sup をとれば$\|\mathbf{AB}\|\leq\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|$が得られる。

(III)（必ずしも行列とは限らない）線形変換の固有値の復習から始める。$\dim X=n>0$とし、Xの任意の基底$\{\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_n\}$をとり、任意の$\mathbf{x}\in X$をこの基底で展開したものを$\mathbf{x}=x_1\mathbf{b}_1+\cdots+x_n\mathbf{b}_n$と書けば、$\mathbf{Ax}=x_1\mathbf{Ab}_1+\cdots+x_n\mathbf{Ab}_n$となる。ここで$\mathbf{Ab}_1,\cdots,\mathbf{Ab}_n\in X$ゆえ、これらも同じ基底で展開し、$\mathbf{Ab}_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\mathbf{b}_i$（$j=1,\cdots,n$）と書けば、

$\mathbf{Ax}=\sum_{j=1}^{n}x_j\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\mathbf{b}_i=\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j)\mathbf{b}_i$となる。以上の計算は形式的な行列積の形に書ける：

(i) $$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1\cdots\mathbf{b}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}、\quad \mathbf{Ax}=\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1\cdots\mathbf{b}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1\cdots\mathbf{b}_n\end{bmatrix}\mathbf{A}_{\{\mathbf{b}_i\}}\mathbf{x}_{\{\mathbf{b}_i\}}$$

$\mathbf{A}$の固有値とは、特定の基底$\{\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_n\}$に関する行列表現$\mathbf{A}_{\{\mathbf{b}_i\}}$の固有値と定義する。このいい方が許されるためには、これらの固有値が基底$\{\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_n\}$の選び方に無関係であることを示す必要がある。実際、他の任意の基底$\{\mathbf{b}_1',\cdots,\mathbf{b}_n'\}$をとれば、これらの基底の間には適当な可

逆行列 $\mathbf{V}$ を介して $[\mathbf{b}_1'\cdots\mathbf{b}_n'] = [\mathbf{b}_1\cdots\mathbf{b}_n]\mathbf{V}$ （これも形式的な行列積形）なる関係がある。これより、$\mathbf{x}$, $\mathbf{A}$ の、基底 $\{\mathbf{b}_1',\cdots,\mathbf{b}_n'\}$ に関する行列表現は

(ii) $\mathbf{x} = [\mathbf{b}_1'\cdots\mathbf{b}_n']\mathbf{V}^{-1}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [\mathbf{b}_1'\cdots\mathbf{b}_n']\begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$

$$\mathbf{Ax} = [\mathbf{b}_1'\cdots\mathbf{b}_n'](\mathbf{V}^{-1}\begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}\mathbf{V})\begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} \equiv [\mathbf{b}_1'\cdots\mathbf{b}_n']\mathbf{A}_{\{\mathbf{b}_i'\}}\mathbf{x}_{\{\mathbf{b}_i'\}}$$

これより、二つの行列表現は互いに相似の関係にあることがわかる：

(iii) $\mathbf{A}_{\{\mathbf{b}_i'\}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{A}_{\{\mathbf{b}_i\}}\mathbf{V}$

従って二つの行列表現は全く同一の固有値を共有する。

さて、行列の固有値-固有ベクトルの関係から、$\mathbf{A}$ の任意の固有値 λ に対して $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ を満たす固有ベクトル $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ （$\mathbf{x} \in X$ ）が存在することがわかる。λ に対応する固有ベクトル $\mathbf{x}$ を $\|\mathbf{x}\| = 1$ を満たすようにとれば（これは常に可能)、$\|\mathbf{A}\| \geq \|\mathbf{Ax}\| = \|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\|\mathbf{x}\| = |\lambda|$ が出る。

(IV) $\|\mathbf{B}\| < 1$ なら、$\mathbf{B}$ の任意の固有値 λ は前項により $|\lambda| \leq \|\mathbf{B}\| < 1$ を満たす。$\mathbf{I} - \mathbf{B}$ の固有値はその行列表現からかならず $1-\lambda$ の形であるから、0 とはならない。ゆえに $(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}$ は確かに存在する。$(\mathbf{I}-\mathbf{B})(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{I}$ より、(†) $(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{B}(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}$ だから、ノルムをとれば、$\|(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\| \leq \|\mathbf{I}\| + \|\mathbf{B}(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\| \leq 1 + \|\mathbf{B}\|\|(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\|$ が得られる。これを $\|(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\|$ について解けば $\|(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}\| \leq 1/(1-\|\mathbf{B}\|)$ が出る。また、(†) 式を $(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1} - \mathbf{I} = \mathbf{B}(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}$ と変形し、ノルムをとれば、$\|(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1} - \mathbf{I}\| \leq \|\mathbf{B}\|/(1-\|\mathbf{B}\|)$ が得られる。固有値を使わない証明法についてはレッスン末「腕試し問題」参照。■

14.9 演算子ノルムの応用例

ノルムは「データに一定の変動を与えたとき答えはどう変動するか」を定量的に評価するための尺度として多用される。例えば、「$\mathbf{A}$ を可逆行列とするとき、$\mathbf{B}$ がどの程度小さければ $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ の可逆性が保証されるか」「$\mathbf{A}+\mathbf{B}$ の固有値は $\mathbf{A}$ の固有値はどれくらい近くにあるか」「 行列方程式 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ (ただし $\mathbf{A}$ は可逆行列）の解はデータ $\mathbf{A}, \mathbf{b}$ が変動するとどう変動するか」

などの評価にノルムが使われる。 このような解析は摂動論 perturbation theory、安定性解析 stability analysis、感度解析 sensitivity analysis、などと呼ばれている。本節では前節までの結果を利用し、このようなノルムの応用例を学ぶ。

例 1　$\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbf{R}^{n\times n}$（または$\mathbf{C}^{n\times n}$）とし、$\mathbf{A}$は可逆行列とする。$\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\|<1$なら、$\mathbf{A}+\mathbf{B}$も可逆行列を表し、

(1)　$\|(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}\|\le\|\mathbf{A}^{-1}\|/(1-\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\|)$

(2)　$\|(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}-\mathbf{A}^{-1}\|\le\|\mathbf{B}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|^2/(1-\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\|)$

が成り立つ。ここに$\|\cdot\|$は任意の演算子ノルムを表す。

証明　$\mathbf{A}=\mathbf{I}$の場合は前節(IV)で証明済みである。これを応用すれば(1)(2)が得られる。実際、$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{A}(\mathbf{I}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})$ゆえ、$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}=(\mathbf{I}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{A}^{-1}$（∵仮定$\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\|<1$と前節(IV)により$(\mathbf{I}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}$が存在する)。ノルムをとり前節(III)(IV)を利用すれば(1)式が出る。

　つぎに、$\mathbf{I}=(\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}=\mathbf{A}(\mathbf{I}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}$より
$\mathbf{A}^{-1}=(\mathbf{I}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}=(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}$。これより
$\mathbf{A}^{-1}-(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{I}+\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{A}^{-1}$が出る。ノルムをとり、再び前節(III)(IV)を使えば、(2)式が得られる。■

例 2　バワー・ファイクの定理 Bauer-Fike theorem　$\mathbf{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$を対角化可能な行列とし（ジョルダン標準形が対角行列)、$\mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \mathbf{0}\\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n\end{bmatrix}\equiv\mathbf{D}$とする。$\mathbf{B}\in\mathbf{C}^{n\times n}$とし、$\mathbf{A}+\mathbf{B}$の任意かつ特定の固有値を$\mu$とすれば、

(3)　$\min_i|\mu-\lambda_i|\le\|\mathbf{X}\|\|\mathbf{X}^{-1}\|\|\mathbf{B}\|$

が成り立つ。ここに$\|\cdot\|$は対角行列のノルムが対角成分の絶対値最大値を与えるような演算子ノルム（例：$\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$）を表すものとする。(3)式の右辺は$\mathbf{B}$のみならず、$\mathbf{X}$にも依存することに注意。数$\|\mathbf{X}\|\|\mathbf{X}^{-1}\|\equiv cond(\mathbf{X})$は$\mathbf{X}$の条件数 condition number と呼ばれ、誤差解析によく出てくる量である（「レッスン 11 特異値分解」で出てきている)。また、(3)はエルミート行列の固有値単調定理「エルミート行列$\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$が$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{C}$を満たせば、

$\alpha_i+\beta_1\le\gamma_i\le\alpha_i+\beta_n$ （$i=1,\cdots,n$）、ここに $\alpha_1\le\cdots\le\alpha_n$, $\beta_1\le\cdots\le\beta_n$, $\gamma_1\le\cdots\le\gamma_n$ は $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ の固有値を表す」（レッスン 8 シュール分解 Part II）が固有値ごとの比較を行っているのにくらべると弱い結果である。

証明：前節(IV)を使うと簡単である。まず $\mu\ne\lambda_i(i=1,\cdots,n)$ と仮定してよい。　すると $0=\det(\mathbf{A}+\mathbf{B}-\mu\mathbf{I})=\det\mathbf{X}^{-1}(\mathbf{A}+\mathbf{B}-\mu\mathbf{I})\mathbf{X}=\det\{(\mathbf{D}-\mu\mathbf{I})+\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X}\}$。ところが $\mu\ne\lambda_i(i=1,\cdots,n)$ だから、$\mathbf{D}-\mu\mathbf{I}$ は可逆行列を表す。ゆえに、$\det(\mathbf{I}+(\mathbf{D}-\mu\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X})=0$。

これを前節(IV)に照らすと、これは $1\le\left\|(\mathbf{D}-\mu\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X}\right\|$ を意味する。前節(III)とノルムに関する仮定を使うと、$1\le\left\|(\mathbf{D}-\mu\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X}\right\|\le\left\|(\mathbf{D}-\mu\mathbf{I})^{-1}\right\|\left\|\mathbf{X}^{-1}\right\|\left\|\mathbf{B}\right\|\left\|\mathbf{X}\right\|=\dfrac{\|\mathbf{X}\|\|\mathbf{X}^{-1}\|\|\mathbf{B}\|}{\min_i|\mu-\lambda_i|}$。

分母を払えば証明すべき不等式が得られる。■

例 3　行列方程式の解の摂動問題（レッスン 11、11.7 節の結果の一般化）。$\mathbf{A},\triangle\mathbf{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ （または $\mathbf{C}^{n\times n}$）、$\mathbf{b},\triangle\mathbf{b}\in\mathbf{R}^{n\times 1}$ （または $\mathbf{C}^{n\times 1}$）を与えられた行列とし、$\mathbf{A}$ は可逆行列、与えられたベクトルノルムと演算子ノルムを同じ記号 $\|\cdot\|$ で表すものとし、$\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\triangle\mathbf{A}\|<1$ とする。すると

$\mathbf{A}+\triangle\mathbf{A}=\mathbf{A}(\mathbf{I}+\mathbf{A}^{-1}\triangle\mathbf{A})$ も可逆行列となる（$\because\|\mathbf{A}^{-1}\triangle\mathbf{A}\|\le\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\triangle\mathbf{A}\|<1$）。そこで方程式 $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ と $(\mathbf{A}+\triangle\mathbf{A})(\mathbf{x}+\triangle\mathbf{x})=\mathbf{b}+\triangle\mathbf{b}$ の解の差 $\triangle\mathbf{x}$ を評価してみよう。ここに $\mathbf{x},\mathbf{x}+\triangle\mathbf{x}\in\mathbf{R}^{n\times 1}$ （または $\mathbf{C}^{n\times 1}$）である。辺々相引けば単純な計算で $\triangle\mathbf{x}=(\mathbf{I}+\mathbf{A}^{-1}\triangle\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{-1}(\triangle\mathbf{b}-\triangle\mathbf{A}\mathbf{x})$ が出る。これまでにもよく使ったノルムの性質を使うと

$$\frac{\|\triangle\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}\le\frac{\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|}{1-\|\mathbf{A}^{-1}\triangle\mathbf{A}\|}\left(\frac{\|\triangle\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|}+\frac{\|\triangle\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}\right)\le\frac{\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|}{1-\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\triangle\mathbf{A}\|}\left(\frac{\|\triangle\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}+\frac{\|\triangle\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}\right)$$

（ここに $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ より $\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{x}\|\ge\|\mathbf{b}\|$）、すなわち、

(4) $$\frac{\|\triangle\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}\le\frac{cond(\mathbf{A})}{1-cond(\mathbf{A})\dfrac{\|\triangle\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}}\left(\frac{\|\triangle\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}+\frac{\|\triangle\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}\right)$$

ここに、$cond(\mathbf{A})=\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|$ は例 2 にも出てきた条件数である。この式を見ると、

$cond(\mathbf{A})\|\triangle\mathbf{A}\|/\|\mathbf{A}\|$ が 1 に比べて小さければ「データの相対的変動の和のほぼ $\mathbf{A}$ の条件数倍が解の相対的変動として表れ得る」ことがわかる。ゆえに、条件数が大きければ、データの小さな変動が大きな解の相対的変動を起こし得ることになる。このようなわけで、係数行列の条件

数が大きい方程式は悪条件である ill-conditioned と呼ばれる。ただし次の例のように例もあることに注意：

$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ & 2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 2^{-n+1} \end{bmatrix}$ の場合は、$\mathbf{A}$ の p-ノルム（$p=1,2,\infty$）条件数はいずれも 2^{n-1} だから、

n 大きければいくらでも大きくなるが、$\mathbf{A}(\mathbf{x}+\vartriangle\mathbf{x})=\mathbf{b}+\vartriangle\mathbf{b}$ （$\vartriangle\mathbf{A}=\mathbf{0}$ としている）は厳密に解けるから、上の誤差評価式は悲観的過ぎることになる。

条件数の推定は数値計算上大事な話題であるがここでは、参考のため 2 x 2 行列の条件数の例を挙げるにとどめよう：実際、$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $(ad-bc\neq 0)$ の ∞-条件数は簡単な計算によって

$$cond(\mathbf{A})=\|\mathbf{A}\|_\infty\|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty=\frac{\max\{|a|+|b|,|c|+|d|\}\max\{|b|+|d|,|a|+|c|\}}{|ad-bc|}$$

14.10　ハーン・バナハの定理

(I)　次にのべる線形汎関数拡大定理をハーン・バナハの定理 Hahn-Banach theorem という：

「与えられた実または複素有限次元ノルム空間 X の部分空間 M 上で定義された（有界）線形汎関数 f 、すなわち、M から対応するスカラー体への線形変換 f 、はその演算子ノルムの値を不変に保ちつつ、X 上で定義された線形汎関数 f_0 にまで拡大できる。すなわち、M 上で $f_0=f$ かつ $\|f_0\|=\|f\|$ を満たす X 上の線形汎関数 f_0 が存在する。ここに

$\|f_0\|=\max\{|f_0(\mathbf{x})|:\|\mathbf{x}\|=1,\ \mathbf{x}\in X\}$、$\|f\|=\max\{|f(\mathbf{x})|:\|\mathbf{x}\|=1,\ \mathbf{x}\in M\}$」

（注意）この定理は X が無限次元であってもこのままの形で成立するが、特殊な論法（ゾーンの補題 Zorn's lemma）を必要とするため、ここでは X を有限次元としている。このため、X 上の線形汎関数は自動的に有界となる（14.6 節）。X が無限次元ならこの定理が意味をもつためには f の有界性を陽に仮定する必要がある。

証明　以下の証明は「G. F. Simmons, Introduction to Topology and Modern Analysis, McGraw-Hill, 1963, §48, 226－229」をもとにしている。解析学からの予備知識は、これまで通り、実数の完備性のみである。

$M=\{\mathbf{0}\}$ なら、M 上の線形汎関数は $f=\mathbf{0}$ のみだから、$f_0=\mathbf{0}$ とすればよい。そこで M を $\{\mathbf{0}\}$ でない真部分空間、f を M 上で定義された線形汎関数とし、$\|f\|=1$ と仮定しておく。

こう仮定しても一般性が失われないことは明らかである。証明の核心部は次の補題である：

（補題）$\mathbf{x}_0 \notin M$ とすれば、f は $M_0 \equiv M + span\{\mathbf{x}_0\}$ 上で定義された、$\|f_0\| = 1$ を満たす線形汎関数 f_0 に拡大できる。

X は有限次元としているから、補題の手続きを有限回繰り返せば f を X 上全体まで拡大できることは明らかである。ゆえに、補題を証明すれば定理の証明が済むことになる（X が無限次元の場合はこの補題と先ほど言及した「ゾーンの補題」が拡大手続きの手段となる)。

（補題の証明）以下の証明は X が有限次元でも無限次元でも成り立つ。X が実ノルム空間である場合をまず扱い、その結果を複素ノルム空間の場合に応用する。

(A) X が実ノルム空間の場合　M_0 内の任意ベクトルは一意的に $\mathbf{x} + \alpha\mathbf{x}_0$（$\alpha$ は実数、$\mathbf{x} \in M$）の形に表せる。ゆえに、f_0 が f を M_0 上に拡大した線形汎関数を表すための必要十分条件は $f_0(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{x}_0) = f_0(\mathbf{x}) + \alpha f_0(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}) + \alpha r_0$ の形をもつことである。ここに

$r_0 \equiv f_0(\mathbf{x}_0)$（実数！）と書いている。残る問題は r_0 の値をどう選べば $\|f_0\| \le 1$ が満たされるか、

だけである（$\because$ すでに $\|f\| = 1$ であるから、$\|f_0\| \le 1$ は $\|f_0\| = 1$ を意味する)。

さて、f_0 の形から

(†)　$\|f_0\| \le 1 \leftrightarrow$ 任意の $\mathbf{x} \in M$、任意の実数 $\alpha \neq 0$ に対して $|f(\mathbf{x}) + \alpha r_0| \le \|\mathbf{x} + \alpha\mathbf{x}_0\|$

$\leftrightarrow$ 任意の $\mathbf{x} \in M$、任意の実数 $\alpha \neq 0$ に対して $-\|\mathbf{x} + \alpha\mathbf{x}_0\| \le f(\mathbf{x}) + \alpha r_0 \le \|\mathbf{x} + \alpha\mathbf{x}_0\|$

$\leftrightarrow$ 任意の $\mathbf{x} \in M$、任意の実数 $\alpha \neq 0$ に対して $-f(\mathbf{x}) - \|\mathbf{x} + \alpha\mathbf{x}_0\| \le \alpha r_0 \le -f(\mathbf{x}) + \|\mathbf{x} + \alpha\mathbf{x}_0\|$

$\leftrightarrow$ 任意の $\mathbf{x} \in M$、任意の実数 $\alpha \neq 0$ に対して $-f(\frac{\mathbf{x}}{\alpha}) - \left\|\frac{\mathbf{x}}{\alpha} + \mathbf{x}_0\right\| \le r_0 \le -f(\frac{x}{\alpha}) + \left\|\frac{\mathbf{x}}{\alpha} + \mathbf{x}_0\right\|$

（最後の同値性は、$\alpha > 0$、$\alpha < 0$ の場合に分けて検算されよ)。

この最後の条件を満たす r_0 が存在することを次に示す。実際、任意の $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in M$ に対して、

$$f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \le |f(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)| \le \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| \quad (\because \|f\| = 1)$$

$$= \|(\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_0) - (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_0)\| \le \|\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_0\| + \|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_0\|$$

ゆえに　$-f(\mathbf{x}_1) - \|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_0\| \le -f(\mathbf{x}_2) + \|\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_0\|$

$\mathbf{x}_1$ を固定しすべての $\mathbf{x}_2 \in M$ に対応する右辺の値の集合の下限をとれば、

$-f(\mathbf{x}_1) - \|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_0\| \le \inf\{-f(\mathbf{x}_2) + \|\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_0\| : \mathbf{x}_2 \in M\}$ なる。この関係はすべての $\mathbf{x}_1 \in M$ に対

して成り立つから、左辺の上限をとれば

$$a \equiv \sup\{-f(\mathbf{x}_1) - \|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_0\| : \mathbf{x}_1 \in M\} \le \inf\{-f(\mathbf{x}_2) + \|\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_0\| : \mathbf{x}_2 \in M\} \equiv b$$

が得られる。ゆえに、r_0 を $a \le r_0 \le b$ を満たすように選べば同値関係(†)の最後の条件が成立することがわかる。

(B)　X が複素ノルム空間の場合　f は複素数値をとる関数であるから、実部と虚部を g, h とし、$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + i \cdot h(\mathbf{x})$ と書くことにする。λ, μ を任意の実数とすれば、任意の $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in M$ に対して、

$$g(\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}) + ih(\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}) = f(\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{u}) + \mu f(\mathbf{v})$$
$$= \lambda g(\mathbf{u}) + \mu g(\mathbf{v}) + i\{\lambda h(\mathbf{u}) + \mu h(\mathbf{v})\}$$

実部を等置すれば（λ, μ は実数ゆえ）、$g(\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}) = \lambda g(\mathbf{u}) + \mu g(\mathbf{v})$ が得られる。すなわち、スカラーを実数に限定すれば、g はノルム空間 X 上で定義された実線形汎関数と見なせる。そこで(A)の結果を利用して、g を M_0 上に拡大し、これを g_0（実線形汎関数）と呼ぼう。ただし、$\|g_0\| = \|g\|$。$|g(\mathbf{x})| \le |f(\mathbf{x})| \le \|f\| = 1$ ゆえ、確かに $\|g\| \le 1$。従って $\|g_0\| \le 1$。

つぎに、$g(i\mathbf{x}) + ih(i\mathbf{x}) = f(i\mathbf{x}) = if(\mathbf{x}) = i\{g(\mathbf{x}) + ih(\mathbf{x})\} = ig(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x})$ から $h(\mathbf{x}) = -g(i\mathbf{x})$ が出る。従って $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) - ig(i\mathbf{x})$。そこで

$f_0(\mathbf{x}') = g_0(\mathbf{x}') - ig_0(i\mathbf{x}')$ $(\mathbf{x}' \in M_0)$ によって f_0 を定義すると、これが、$\|f_0\| = 1$ を満たしつつ、f を M_0 上に拡大した線形汎関数となっていることを示そう。実際、直前の計算から f と f_0 の値は M 上で一致していることがわかる。しかも g_0 の性質から、

任意の $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in M_0$ に対して、$f_0(\mathbf{x}' + \mathbf{x}'') = f_0(\mathbf{x}') + f_0(\mathbf{x}'')$、

任意の実数 α に対して、$f_0(\alpha\mathbf{x}') = \alpha f_0(\mathbf{x}')$

が成り立つことがわかる。そして後者の関係はたとえ α が複素数であっても成り立つことは次の計算で検証できる：まず

$$f_0(i\mathbf{x}') = g_0(i\mathbf{x}') - ig_0(i \cdot i\mathbf{x}') = i\{-g_0(-\mathbf{x}') - ig_0(i\mathbf{x}')\} = if_0(\mathbf{x}') \ (\because g_0(-\mathbf{x}') = -g_0(\mathbf{x}'))$$

ゆえに、任意の実数 λ, μ に対して

$$f_0((\lambda + i\mu)\mathbf{x}') = f_0(\lambda\mathbf{x}') + f_0(i \cdot \mu\mathbf{x}') = \lambda f_0(\mathbf{x}') + if_0(\mu\mathbf{x}')$$
$$= \lambda f_0(\mathbf{x}') + i\mu f_0(\mathbf{x}') = (\lambda + i\mu) f_0(\mathbf{x}')$$

以上により、f_0 は f を M_0 上に拡大した線形汎関数であることがわかる。

残るは $\|f_0\| = 1$ を示すのみである。これを示すには、$\|\mathbf{x}'\| = 1$ を満たすすべての $\mathbf{x}' \in M_0$ に対して、$|f_0(\mathbf{x}')| \le 1$ が成立することを示せば十分である（$\because$ f_0 は f を M_0 上に拡大した線形汎関数であるから $\|f_0\| \ge \|f\| = 1$ はすでにわかっている）。実際、$\mathbf{x}' \in M_0$、$\|\mathbf{x}'\| = 1$、$f_0(\mathbf{x}') = re^{i\theta}$

（極表示）とすれば、$\left|f_0(\mathbf{x}')\right| = r = e^{-i\theta} f_0(\mathbf{x}') = f_0(e^{-i\theta}\mathbf{x}') = g_0(e^{-i\theta}\mathbf{x}')$（$\because$ $f_0(e^{-i\theta}\mathbf{x}')$ は実数！）ゆえ、

$\left|f_0(\mathbf{x}')\right| = g_0(e^{-i\theta}\mathbf{x}') \le \|g_0\|\left\|e^{-i\theta}\mathbf{x}'\right\| \le 1\cdot\left|e^{-i\theta}\right|\|\mathbf{x}'\| = \|\mathbf{x}'\| = 1$（この計算から f_0 はすべての実数値をとり、f_0 のノルム値はその実部のノルム値に等しい、ことがわかる！）■

以上の証明をみると、各ステップは単純だが、構成は巧妙である。複素汎関数の扱いに複素数の性質が巧みに使われていて、彼らのいう”slick proof”の好例といえる。証明の複雑さはこの定理のパワーを暗示している。ハーン・バナハの定理の応用は以下(II)(III))の形をとることが多い。

(II)　X を有限次元ノルム空間とすれば、任意の $\mathbf{0} \ne \mathbf{x}_0 \in X$ に対して $f_0(\mathbf{x}_0) = \|\mathbf{x}_0\|$ かつ $\|f_0\| = 1$ を満たす線形汎関数 f_0 が存在する。

証明　(I)において $M = span\{\mathbf{x}_0\}$ ととり、$f(\alpha\mathbf{x}_0) = \alpha\|\mathbf{x}_0\|$ によって線形汎関数 f を定義すれば、明らかに $f(\mathbf{x}_0) = \|\mathbf{x}_0\|$ かつ $\|f\| = 1$ が成り立つ。すると、ハーン・バナハの定理により、f は要求される性質をもつ X 上の線形汎関数に拡大できる。■

（注意）X を有限次元としているから、$\|f_0\| = 1$ を満たす任意の線形汎関数 f_0 に対して $f_0(\mathbf{x}_0) = \|\mathbf{x}_0\|$ を満たす $\mathbf{x}_0 \ne \mathbf{0}$ が存在することはわかっている（14.6 節）。(II)はこの双対問題も真であることをいっている。(II)は実は X が無限次元であっても成り立つ。

(III)　$X = \mathbf{R}^{n\times1}$ または $\mathbf{C}^{n\times1}$ の場合　与えられた $\mathbf{x}_0 \ne \mathbf{0}$ に対して、$\left|\mathbf{a}^T\mathbf{x}_0\right| = \|\mathbf{x}_0\|$ かつ $\left\|\mathbf{a}^T\right\| = 1$ を満たす $\mathbf{a} \in X$ が存在する。ここに $\left\|\mathbf{a}^T\right\| = \max\{\left|\mathbf{a}^T\mathbf{x}\right| : \|\mathbf{x}\| = 1\}$。

証明　(II)により $f_0(\mathbf{x}_0) = \|\mathbf{x}_0\|$ かつ $\|f_0\| = 1$ を満たす X 上の線形汎関数 f_0 が存在する。そして $\mathbf{a} = \left[\, f_0(\mathbf{e}_1)\cdots f_0(\mathbf{e}_n)\right]^T$（$\mathbf{e}_1, \cdots$ は単位ベクトル）とすれば、すべての $\mathbf{x} \in X$ に対して $f_0(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^T\mathbf{x}$ となる。■

例 1　(III)における $X = \mathbf{R}^{n\times1}$ または $\mathbf{C}^{n\times1}$ 上のノルムを p -ノルム（$1 \le p \le \infty$）とする。$\mathbf{b} \in X$ を与えられたベクトルとし（$\mathbf{x}_0$ をここでは $\mathbf{b}$ と書いている）、(III)で存在を保証されている

$\mathbf{a}^T\mathbf{b}=\|\mathbf{b}\|$, $\|\mathbf{a}^T\|=1$ を満たす $\mathbf{a}=[a_1\cdots a_n]^T\in X$ を示そう。

(a) $p=1$ の場合　$\|\mathbf{a}^T\|_1=\max|a_i|=\|\mathbf{a}\|_\infty$ は既知である。$\mathbf{a}^T\mathbf{b}=\|\mathbf{a}^T\|_1\|\mathbf{b}\|_1=\|\mathbf{a}\|_\infty\|\mathbf{b}\|_1$ を満たす

$\mathbf{a}$ の例は $a_1=|b_1|/b_1,\cdots a_n=|b_n|/b_n$ である（ただし、$b_i=0$ なら $a_i=0$ とおく）。

検算：$\mathbf{a}^T\mathbf{b}=a_1b_1+\cdots+a_nb_n=(|b_1|/|b_1|)b_1+\cdots+(|b_n|/|b_n|)b_n=|b_1|+\cdots+|b_n|=\|\mathbf{b}\|_1$、

$\|\mathbf{a}^T\|_1=\max\{1,\cdots,1\}=1$。

(b) $p=\infty$ の場合　$\|\mathbf{a}^T\|_\infty=|a_1|+\cdots+|a_n|=\|\mathbf{a}\|_1$ は既知である。$\mathbf{a}^T\mathbf{b}=\|\mathbf{a}^T\|_\infty\|\mathbf{b}\|_\infty=\|\mathbf{a}\|_1\|\mathbf{b}\|_\infty$ を

満たす $\mathbf{a}$ の例：$\|\mathbf{b}\|_\infty=\max|b_i|=b_k$ となる k を一つとり、$a_i=0(i\neq k),\ a_k=\overline{b_k}/|b_k|$ とする。

検算：$\mathbf{a}^T\mathbf{b}=0+\cdots+0+(\overline{b_k}/|b_k|)b_k+0+\cdots+0=|b_k|=\|\mathbf{b}\|_\infty$、そして

$\|\mathbf{a}^T\|_\infty=0+\cdots+0+1+0+\cdots+0=1$。

(c) $1<p<\infty$ の場合　「腕試し問題」中で示すように、$1<p,q$、$1/p+1/q=1$ を満たす正数 p,q に対して $\|\mathbf{a}^T\|_p\equiv\max\{|\mathbf{a}^T\mathbf{x}|:\|\mathbf{x}\|=1\}=\|\mathbf{a}\|_q=(|a_1|^q+\cdots+|a_n|^q)^{1/q}$ が成り立つ。

$\mathbf{a}^T\mathbf{b}=\|\mathbf{a}^T\|_p\|\mathbf{b}\|_p=\|\mathbf{a}\|_q\|\mathbf{b}\|_p$（$pq=p+q$）を満たす $\mathbf{a}$ の例：

$a_i=|b_i|^p/b_i$（$i=1,\cdots,n$、ただし、$b_i=0$ なら $a_i=0$ とおく）とすればよい。

検算：$\mathbf{a}^T\mathbf{b}=\sum(|b_i|^p/b_i)b_i=\sum|b_i|^p=\|\mathbf{b}\|_p{}^p$、

$\|\mathbf{a}^T\|_p=\|\mathbf{a}\|_q=(\sum(|b_i|^p/|b_i|)^q)^{1/q}=(\sum|b_i|^{(p-1)q})^{1/q}=(\sum|b_i|^p)^{1/q}=\|\mathbf{b}\|_p{}^{p/q}=\|\mathbf{b}\|_p{}^{p-1}$

ゆえに、$\mathbf{a}^T\mathbf{b}=\|\mathbf{b}\|_p{}^p=\|\mathbf{b}\|_p{}^{p-1}\|\mathbf{b}\|_p=\|\mathbf{a}^T\|_p\|\mathbf{b}\|_p$。

14.11　ハーン・バナハの定理の応用例

本節の内容は「W. Kahan, Numerical linear algebra, Canadian Mathematical Bulletin 9 (1966), 757-801」中の定理（775 ページ）をもとにしている。つぎの事実(I)(II)が成り立つ：

(I)　$\mathbf{0} \neq \mathbf{A} = \left[a_{ij}\right] \in \mathbf{C}^{m\times n}$ を与えられた行列とし、$\mathbf{C}^{m\times 1}$、$\mathbf{C}^{n\times 1}$ 上に任意のノルムを与える。すると、$\|\mathbf{x}_0\| = 1$、$\|\mathbf{y}_0{}^T\| = 1$ を満たす適当な $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{C}^{n\times 1}$、$\mathbf{y}_0 \in \mathbf{C}^{m\times 1}$ をとれば、$\|\mathbf{A}\| = \mathbf{y}_0{}^T \mathbf{A}\mathbf{x}_0$ が成り立つ。ここに、$\|\mathbf{y}_0{}^T\|$、$\|\mathbf{A}\|$ は与えられたベクトルノルムに対応する演算子ノルムを表す：

$$\|\mathbf{y}_0{}^T\| = \max\{|\mathbf{y}_0{}^T\mathbf{y}| : \mathbf{y} \in \mathbf{C}^{m\times 1}, \|\mathbf{y}\| = 1\}、\|\mathbf{A}\| = \max\{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| : \mathbf{x} \in \mathbf{C}^{n\times 1}, \|\mathbf{x}\| = 1\}。$$

証明　まず、$\|\mathbf{A}\mathbf{x}_0\| = \|\mathbf{A}\|$ を成立させる $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{C}^{n\times 1}$、$\|\mathbf{x}_0\| = 1$ を適当にとる（14.6 節により可能）。ハーン・バナハの定理により $\mathbf{y}_0{}^T \mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \|\mathbf{A}\mathbf{x}_0\|$ かつ $\|\mathbf{y}_0{}^T\| = 1$ を満たす $\mathbf{y}_0 \in \mathbf{C}^{m\times 1}$ がとれる。$\|\mathbf{A}\mathbf{x}_0\| = \|\mathbf{A}\|$ ゆえ、結局、$\mathbf{y}_0{}^T \mathbf{A}\mathbf{x}_0 = \|\mathbf{A}\|$ となる。■

(II)　与えられた可逆行列 $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right] \in \mathbf{C}^{n\times n}$ から非可逆行列までの最短距離は $1/\|\mathbf{A}^{-1}\|$ に等しい。すなわち、$\|\vartriangle\mathbf{A}\| < 1/\|\mathbf{A}^{-1}\|$ なら $\mathbf{A} + \vartriangle\mathbf{A}$ は必ず可逆行列であり、$\|\vartriangle\mathbf{A}\| = 1/\|\mathbf{A}^{-1}\|$ を満たす $\vartriangle\mathbf{A}$ の中に $\mathbf{A} + \vartriangle\mathbf{A}$ を非可逆行列とするようなものが存在する。ここに行列ノルム $\|\mathbf{A}^{-1}\|$、$\|\vartriangle\mathbf{A}\|$ は与えられたベクトルノルムに対応する演算子ノルムを表す。別の述べ方をすれば、$\mathbf{A}/\|\mathbf{A}\|$ から非可逆行列までの最短距離は $1/(\|\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{A}^{-1}\|) = 1/cond(\mathbf{A})$ によって与えられる。$cond(\mathbf{A})$ は $\mathbf{A}$ の条件数と呼ばれることはすでに述べた。ベクトルノルムの選び方に無関係に $cond(\mathbf{A}) \geq \|\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\| = \|\mathbf{I}\| = 1$ が成り立つことに改めて注意。

（注意）2-ノルムに限定した場合はレッスン 11「特異値分解」で証明済みである。

証明　$\mathbf{A} + \vartriangle\mathbf{A}$ を非可逆行列とすれば、$(\mathbf{A} + \vartriangle\mathbf{A})\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ を満たす $\mathbf{0} \neq \mathbf{x}_0 \in \mathbf{C}^{n\times 1}$ がとれる。すると、$\|\mathbf{A}\mathbf{x}_0\| = \|-\vartriangle\mathbf{A}\mathbf{x}_0\| \leq \|\vartriangle\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{x}_0\| = \|\vartriangle\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x}_0\| \leq \|\vartriangle\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{A}^{-1}\|\cdot\|\mathbf{A}\mathbf{x}_0\|$。これより $\|\vartriangle\mathbf{A}\| \geq 1/\|\mathbf{A}^{-1}\|$（$\because$ $\mathbf{A}\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$）が得られる。対偶をとれば問題の主張の前半が証明される。

つぎに、(I)を $\mathbf{A}^{-1}$ に適用すれば（$m = n$）、$\|\mathbf{A}^{-1}\| = \mathbf{y}_0{}^T \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_0$、ただし $\|\mathbf{y}_0{}^T\| = 1$、$\|\mathbf{x}_0\| = 1$、

を満たす $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \in \mathbf{C}^{n\times 1}$ がとれるはずである。$\triangle\mathbf{A} = -\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0{}^T / \|\mathbf{A}^{-1}\|$ とおけば、

$\|\triangle\mathbf{A}\| = 1/\|\mathbf{A}^{-1}\|$ かつ $\mathbf{A}+\triangle\mathbf{A}$ が非可逆行列となることを示そう。実際、$\|\mathbf{A}^{-1}\| = \mathbf{y}_0{}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_0$ ゆえ

$(\mathbf{A}+\triangle\mathbf{A})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_0 = (\mathbf{A}-\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0{}^T/\|\mathbf{A}^{-1}\|)\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0(\mathbf{y}_0{}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_0)/\|\mathbf{A}^{-1}\| = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0\cdot 1 = \mathbf{0}$

が得られる。$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$ ゆえ、これは $\mathbf{A}+\triangle\mathbf{A}$ が非可逆行列であることを示す。前半の結果から、

$\|\triangle\mathbf{A}\| \geq 1/\|\mathbf{A}^{-1}\|$ のはずである。他方、$\|\triangle\mathbf{A}\| = \|-\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0{}^T\|/\|\mathbf{A}^{-1}\| \leq \|\mathbf{x}_0\|\cdot\|\mathbf{y}_0{}^T\|/\|\mathbf{A}^{-1}\| = 1/\|\mathbf{A}^{-1}\|$。

結局、$\|\triangle\mathbf{A}\| = 1/\|\mathbf{A}^{-1}\|$ が結論される。■

例　$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ より ∞-演算子ノルムに関して最短距離にある非可逆行列

$\mathbf{B} = \mathbf{A} - \mathbf{x}_0\mathbf{y}_0{}^T/\|\mathbf{A}^{-1}\|$ を構築してみよう (証明参照)。$\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$、ゆえに $\|\mathbf{A}^{-1}\| = 3$ (最大行和ノルム)。$\mathbf{x}_0$ としては $\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_0\| = \|\mathbf{A}^{-1}\|$ および $\|\mathbf{x}_0\| = 1$ を満たすベクトルをとればよい。

そのような $\mathbf{x}_0$ の一例は $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T$ である。そして $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix}^T$ となる。$\mathbf{y}_0$ としては

$\mathbf{y}_0{}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_0 = \|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_0\|$ および $\|\mathbf{y}_0{}^T\| = 1$ を満たすベクトルをとればよい。そのようなベクトルの一例は $\mathbf{y}_0{}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ である。ゆえに

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} - \mathbf{x}_0\mathbf{y}_0{}^T/\|\mathbf{A}^{-1}\| = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}/3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}$$

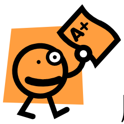
また、$\mathbf{A}$ より $\mathbf{B}$ までの距離は証明中で示したように $1/\|\mathbf{A}^{-1}\| = 1/3$ であるはずである。検算：

$\|\mathbf{B}-\mathbf{A}\| \equiv \left\|-\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0{}^T/\|\mathbf{A}^{-1}\|\right\| = \left\|\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\| = \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{\|\mathbf{A}^{-1}\|}$。$\mathbf{A}$ の条件数 $cond(\mathbf{A})$ を計算すると、

$cond(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{A}^{-1}\| = 7\cdot 3 = 21$。■

最後にひとこと：このレッスンの最も基礎的な結果は「線形変換の連続性（有界性）」「展開係数の有界性」「有限次元ノルム空間の完備性」「ノルムの同値性」「演算子ノルムと性質」「ハ

ーン・バナハの定理」である。証明のために解析学からの既知事項として仮定したのは実数・複素数の完備性だけである。ハーン・バナハの定理は一般のノルムに関して、「与えられた可逆行列から非可逆行列までの最短距離」を算出するために必要であった。この定理は双対問題の解を保証することを思えばその重要性を理解できよう。



腕試し問題

問題 14.1　与えられたベクトル空間 X 上のノルム $\|\cdot\|$、$\|\cdot\|'$ の同値性

$\alpha\|\mathbf{x}\| \le \|\mathbf{x}\|' \le \beta\|\mathbf{x}\|$（$\mathbf{x} \in X$ 、α, β は正定数）を記号で $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$ で表すことにすれば、

"$\sim$"は同値関係を表すことを示せ。

（略解　（回帰性）X 上の任意のノルム $\|\cdot\|$ に対して $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|$、

（対称性）$\|\cdot\|$、$\|\cdot\|'$ に対して、$\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$ なら $\|\cdot\|' \sim \|\cdot\|$、

（推移性）$\|\cdot\|$、$\|\cdot\|'$、$\|\cdot\|''$ に対して、$\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$ かつ $\|\cdot\|' \sim \|\cdot\|''$ なら $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|''$

が成り立つことを示せばよい。■）

問題 14.2（14.８節(IV)の別証明）　X を有限次元ノルム空間とし、$\mathbf{A}$ を X からそれ自身への線形変換とする。演算子ノルム $\|\mathbf{A}\|$ に対して、不等式 $\|\mathbf{A}\| < 1$ が満たされれば、$(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$ が存在し、$\|(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\| \le 1/(1-\|\mathbf{A}\|)$ が成り立つことを次の手順に従って示せ。

(1) 自然数 k に対して $\mathbf{B}_k = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \cdots + \mathbf{A}^{k-1}$ とすれば、$(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{B}_k = \mathbf{B}_k(\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \mathbf{I} - \mathbf{A}^k$。

(2) $\{\mathbf{B}_k\}$ はコーシー列を表すことを示せ。ゆえに 14.3 節により $\{\mathbf{B}_k\}$ は収束する。その極限を $\mathbf{B}$ とする：$\|\mathbf{B}_k - \mathbf{B}\| \to 0$。

(3) (1)において $k \to \infty$ の極限をとり、$\|\mathbf{A}^k\| \le \|\mathbf{A}\|^k \to 0$ を利用して $(\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \mathbf{I}$、すなわち、$\mathbf{B} = (\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$、を示せ。

(4)　$\|\mathbf{B}_k\| = \|\mathbf{I} + \mathbf{A} + \cdots + \mathbf{A}^{k-1}\| \le 1 + \|\mathbf{A}\| + \cdots + \|\mathbf{A}\|^k = \dfrac{1-\|\mathbf{A}\|^k}{1-\|\mathbf{A}\|}$

および$0 \le \left| \|\mathbf{B}_k\| - \|\mathbf{B}\| \right| \le \|\mathbf{B}_k - \mathbf{B}\| \to 0$を利用して$\left\|(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right\| \le 1/(1-\|\mathbf{A}\|)$を導け。

（略証：(1) 単純な計算で出る。

(2) $\left\|\mathbf{B}_p - \mathbf{B}_q\right\| = \left\|\mathbf{A}^p + \cdots + \mathbf{A}^{q-1}\right\| \le \|\mathbf{A}\|^p (1 + \cdots + \|\mathbf{A}\|^{q-p-1}) \le 2\|\mathbf{A}\|^p$（ただし$p \le q$）。これに与えられた条件$\|\mathbf{A}\| < 1$を適用すればよい。(3) 問題文中の指針に従えばよい。■）

問題 14.3 （14.4 節の逆）「無限次元ノルム空間の単位球表面上から収束する部分列を全くもたないベクトル列を選ぶことができる」ことを次の手順によって示せ。X を与えられた無限次元ノルム空間とする。

(I) X_nを任意のn次元部分空間（$n = 1, 2, \cdots$）、$\{\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n\}$を$X_n$の基底とし、$X_n$外より任意のベクトル$\mathbf{b}$を一つ選び、$X_{n+1} \equiv span\{\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n, \mathbf{b}\}$とすれば、$X_{n+1}$は$n+1$次元部分空間を表す。このとき、$d \equiv dist(\mathbf{b}, X_n) \equiv \inf\{\|\mathbf{b}-\mathbf{x}\| : \mathbf{x} \in X_n\}$（“$\mathbf{b}$ より X_n までの最短距離”）$= \left\|\mathbf{b} - \mathbf{x}^{(0)}\right\|$を満たす$\mathbf{x}^{(0)} \in X_n$が存在することを示せ。

(II)　$\mathbf{y}^{(0)} \equiv (\mathbf{b} - \mathbf{x}^{(0)}) / \left\|\mathbf{b} - \mathbf{x}^{(0)}\right\| = (\mathbf{b} - \mathbf{x}^{(0)}) / d$を定義すれば、明らかに、$\mathbf{y}^{(0)} \in X_{n+1}$かつ$\left\|\mathbf{y}^{(0)}\right\| = 1$。すると、任意の$\mathbf{x} \in X_n$に対して$\left\|\mathbf{x} - \mathbf{y}^{(0)}\right\| \ge 1$が成り立つことを示せ。

(III) 単位球表面$S = \{\mathbf{x} \in X : \|\mathbf{x}\| = 1\}$上から、収束する部分列を全く含まない列を抽出できることを示せ。

以上と 14.5 節の結果を総合すれば、「すべての有界列が収束する部分列を含むための必要十分条件は、その空間が有限次元であることである」。

（注意） (I)(II)は、A. E. Taylor and D. C. Lay, Introduction to Functional Analysis, Second Edition, Krieger, 1980, Theorem 3.5(Riesz's Lemma), p. 64、を多少変更したものである。Taylor and Lay では、X_nに相当する部分空間を、有限または無限閉部分空間X_0としているため、結論は「$0 < \theta < 1$を満たす各実数θに対して$dist(\mathbf{y}^{(0)}, X_0) \ge \theta$を満たす$\mathbf{y}^{(0)} \in X$ が存在する」こととなっている。(III)は、Taylor and Lay、Therem 3.6 (p.65)と本質的に同じである。

（略証　(I) 各自然数kに対して（＊）$d \le \|\mathbf{b} - \mathbf{x}_k\| < d + (1/k)$を満たす$\mathbf{x}_k \in X_n$を選べば$\{\mathbf{x}_k\}$は明らかに$X_n$内の有界列を表すから、14.5 節により、$X_n$内のベクトル$\mathbf{x}^{(0)}$に収束する部分列

を含む。これを（＊）式に使えば $d=\|\mathbf{b}-\mathbf{x}^{(0)}\|>0$ を得る。(II) 次を検算せよ：

$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}^{(0)}\|=\|\mathbf{x}-(1/d)(\mathbf{b}-\mathbf{x}^{(0)})\|=(1/d)\|d\mathbf{x}+\mathbf{x}^{(0)}-\mathbf{b}\|\geq(1/d)d=1$（$\because d\mathbf{x}+\mathbf{x}^{(0)}\in X_n$）。

(III) $\mathbf{b}_1\in S$ を任意に取り、$span\{\mathbf{b}_1\}\equiv X_1$ とする。(II)により、$\mathbf{b}_2\in S$ を適当にとれば $dist(\mathbf{b}_2,X_1)=1$ となる。$span\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2\}\equiv X_2$ とする。以下同様の手続きにより、S 上のベクトル列 $\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots\}\equiv\{\mathbf{b}_k\}$ が得られる。ここに

$dist(\mathbf{b}_{k+1},X_k)=1$（$k=1,2,\cdots$）。これより任意の自然数 $m\neq n$ に対して、$\|\mathbf{b}_m-\mathbf{b}_n\|\geq1$ が成り立つ。このような S 上の列は収束する部分列を全く含まないことは明らか。■）

問題 14.4　（行列ノルム計算問題）次の行列の 1-ノルムと ∞-ノルムを計算せよ：

$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}-1 & 2i & 1-i\end{bmatrix}$, $\mathbf{P}^T$, $\mathbf{P}^*$, $\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1-i & 2i\end{bmatrix}$, $\mathbf{Q}^T$, $\mathbf{Q}^*$

（答：　$\|\mathbf{P}\|_1=\|\mathbf{P}^T\|_\infty=\|\mathbf{P}^*\|_\infty=2$、$\|\mathbf{P}\|_\infty=\|\mathbf{P}^T\|_1=\|\mathbf{P}^*\|_1=3+\sqrt{2}$、

$\|\mathbf{Q}\|_1=\|\mathbf{Q}^T\|_\infty=\|\mathbf{Q}^*\|_\infty=4$、$\|\mathbf{Q}\|_\infty=\|\mathbf{Q}^T\|_1=\|\mathbf{Q}^*\|_1=2+\sqrt{2}$　■）

問題 14.5 （行列ノルムに関する問題）　$\mathbf{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$、$\mathbf{B}$ を $\mathbf{A}$ の任意小行列（ブロック）とすれば、$\|\mathbf{B}\|_p\leq\|\mathbf{A}\|_p$ が成り立つ。ここに $p=1,2,\infty$ のいずれかとする。

（略証：p-ノルムの定義より、任意の列ベクトル $\mathbf{y}$ の数個の成分を 0 で置き換えたものを $\mathbf{y}'$ で表せば、明らかに $\|\mathbf{y}'\|_p\leq\|\mathbf{y}\|_p$ が成り立つ。そこで $\mathbf{B}$ を、$\mathbf{A}$ より第 $i_1,\cdots,i_p$ 行、第 $j_1,\cdots,j_q$ 列を削除して得られる小行列とすれば、

$\|\mathbf{B}\|_p\leq\max\{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p:\|\mathbf{x}\|_p=1\ \&\ x_j=0,\ j=j_1,\cdots,j_q\}\leq\|\mathbf{A}\|_p$　■）

問題 14.6　$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{C}\end{bmatrix}$ または $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{0}\end{bmatrix}$ なら、$\|\mathbf{A}\|_p=\max\{\|\mathbf{B}\|_p,\|\mathbf{C}\|_p\}$ が成り立つことを示せ。ここに $p=1,2,\infty$ のいずれかとする。

（略証：$\|\mathbf{A}\|_1$＝最大列和、$\|\mathbf{A}\|_\infty$＝最大行和、$\|\mathbf{A}\|_2$＝最大特異値＝$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ の最大固有値の平方根、ここに $\mathbf{A}^T\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}^T\mathbf{B} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^T\mathbf{C}\end{bmatrix}$ または $\begin{bmatrix}\mathbf{C}^T\mathbf{C} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^T\mathbf{B}\end{bmatrix}$、を考慮すれば直ちに出る。■）

問題 14.7　$\mathbf{0} \neq \mathbf{c} \in \mathbf{R}^{n\times 1}, \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n\times n}$ とすれば、$\left\| \mathbf{B}(\mathbf{I} - \dfrac{\mathbf{c}\mathbf{c}^T}{\mathbf{c}^T\mathbf{c}}) \right\|_F = \|\mathbf{B}\|_F^2 - \|\mathbf{Bc}\|_2^2 / \mathbf{c}^T\mathbf{c}$

（注意）$\mathbf{I} - \dfrac{\mathbf{c}\mathbf{c}^T}{\mathbf{c}^T\mathbf{c}}$ は平面 $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = 0$ 上への正射影を表す。$\|\cdot\|_F$ はフロベニウス・ノルムを表す。

（略証　一般に $\|\mathbf{X}\|_F \equiv (\sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}{}^2)^{1/2} = (tr(\mathbf{X}^T\mathbf{X}))^{1/2}$、ここに $tr(\cdots)$ はトレースを表す。一般に $tr(\mathbf{P}+\mathbf{Q}) = tr(\mathbf{P}) + tr(\mathbf{Q}),\ tr(c\mathbf{P}) = c\cdot tr(\mathbf{P}),\ tr(\mathbf{PQ}) = tr(\mathbf{QP})$ が成り立つ（ここに $\mathbf{P},\mathbf{Q}$ は正方行列、c はスカラー）。以上から

$$\left\| \mathbf{B}(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{c}\mathbf{c}^T}{\mathbf{c}^T\mathbf{c}}) \right\|_F^2 = tr((\mathbf{I} - \frac{\mathbf{c}\mathbf{c}^T}{\mathbf{c}^T\mathbf{c}})^T \mathbf{B}^T\mathbf{B}(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{c}\mathbf{c}^T}{\mathbf{c}^T\mathbf{c}})) = tr(\mathbf{B}^T\mathbf{B}(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{c}\mathbf{c}^T}{\mathbf{c}^T\mathbf{c}})^2)$$

$$= tr(\mathbf{B}^T\mathbf{B}(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{c}\mathbf{c}^T}{\mathbf{c}^T\mathbf{c}})) = tr(\mathbf{B}^T\mathbf{B}) - tr(\mathbf{B}\frac{\mathbf{c}\mathbf{c}^T}{\mathbf{c}^T\mathbf{c}}\mathbf{B}^T) = tr(\mathbf{B}^T\mathbf{B}) - tr(\frac{(\mathbf{Bc})^T(\mathbf{Bc})}{\mathbf{c}^T\mathbf{c}})$$

$$= \|\mathbf{B}\|_F^2 - \frac{\|\mathbf{Bc}\|_2^2}{\mathbf{c}^T\mathbf{c}}$$　ここに、$\mathbf{Bc}$ は $n\times 1$ ゆえ、$\|\mathbf{Bc}\|_2 = \|\mathbf{Bc}\|_F$。■）

問題 14.8　任意の $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^{m\times 1}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^{n\times 1}$ に対して $\|\mathbf{a}\mathbf{b}^T\|_F = \|\mathbf{a}\mathbf{b}^T\|_2 = \|\mathbf{a}\|_2\|\mathbf{b}\|_2$ および

$\|\mathbf{a}\mathbf{b}^T\|_\infty \le \|\mathbf{a}\|_\infty\|\mathbf{b}\|_1$ が成立することを示せ。

（注意）　すでに学んだように、$p = 1, 2, \infty$、$\mathbf{a} \in \mathbf{R}^{m\times 1}$（または $\mathbf{C}^{m\times 1}$）に対して、$\|\mathbf{a}\|_p$ を演算子ノルムと見なしてもベクトルノルムと見なしても、値は一致する。

（略証　まず $\|\mathbf{a}\mathbf{b}^T\|_F^2$ を計算すると（前問略解参照）、

$$\|\mathbf{a}\mathbf{b}^T\|_F^2 = tr((\mathbf{a}\mathbf{b}^T)^T\mathbf{a}\mathbf{b}^T) = \mathbf{a}^T\mathbf{a}\cdot tr(\mathbf{b}\mathbf{b}^T) = \mathbf{a}^T\mathbf{a}\cdot tr(\mathbf{b}^T\mathbf{b}) = \mathbf{a}^T\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}^T\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|_2^2\|\mathbf{b}\|_2^2。$$

$\|\mathbf{a}\mathbf{b}^T\|_2^2 = (\mathbf{a}\mathbf{b}^T)^T(\mathbf{a}\mathbf{b}^T)$ の最大固有値＝$(\mathbf{a}^T\mathbf{a})$（$\mathbf{b}\mathbf{b}^T$ の最大固有値）。ここで $\mathbf{b}\mathbf{b}^T$ の固有値は $\mathbf{b}^T\mathbf{b}, 0, \cdots, 0$ であることより、$\mathbf{b}\mathbf{b}^T$ の最大固有値は $\mathbf{b}^T\mathbf{b}$ である。ゆえに

$$\|\mathbf{a}\mathbf{b}^T\|_2^2 = (\mathbf{a}^T\mathbf{a})(\mathbf{b}^T\mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\|_2^2\|\mathbf{b}\|_2^2 = \|\mathbf{a}\mathbf{b}^T\|_F^2$$

後半の証明：演算子ノルムの性質から $\|\mathbf{a}\mathbf{b}^T\|_\infty \le \|\mathbf{a}\|_\infty\|\mathbf{b}^T\|_\infty = \|\mathbf{a}\|_\infty\|\mathbf{b}\|_1$　■）

問題 14.9　$\mathbf{0} \neq \mathbf{a} \in \mathbf{R}^{n\times 1}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^{m\times 1}$ とするとき、$\mathbf{Xa} = \mathbf{b}$ を満たすすべての $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{m\times n}$ のうち、

$\mathbf{X}=\mathbf{X}_0\equiv\mathbf{b}\mathbf{a}^T/\mathbf{a}^T\mathbf{a}$ は最小の 2-ノルム $\|\mathbf{b}\|/\|\mathbf{a}\|$ をもつことを示せ。（$\|\cdot\|_2$ を単に $\|\cdot\|$ と書く。）

(略証　$\mathbf{X}\mathbf{a}=\mathbf{b}$ を満たす任意の $\mathbf{X}\in\mathbf{R}^{m\times n}$ をとる。ノルムをとれば $\|\mathbf{X}\|\|\mathbf{a}\|\geq\|\mathbf{b}\|$ が得られる。これより $\|\mathbf{X}\|\geq\|\mathbf{b}\|/\|\mathbf{a}\|$。一方、$\mathbf{X}_0=\mathbf{b}\mathbf{a}^T/\mathbf{a}^T\mathbf{a}\in\mathbf{R}^{m\times n}$ は確かに $\mathbf{X}_0\mathbf{a}=\mathbf{b}$ を満たし、前問の結果を利用すれば、$\|\mathbf{X}_0\|=\|\mathbf{b}\mathbf{a}^T/\mathbf{a}^T\mathbf{a}\|=\|\mathbf{b}\|\|\mathbf{a}\|/\|\mathbf{a}\|^2=\|\mathbf{b}\|/\|\mathbf{a}\|$ が得られる。■)

問題 14.10　任意の $\mathbf{A}\in\mathbf{R}^{m\times n}$ に対して $\dfrac{\|\mathbf{A}\|_F}{\sqrt{rank(\mathbf{A})}}\leq\|\mathbf{A}\|_2\leq\|\mathbf{A}\|_F$ が成立することを示せ。

（略証　$\|\mathbf{A}\|_F=\sqrt{trace(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}$、$\|\mathbf{A}\|_2=$「$\mathbf{A}$ の最大特異値」を使う。$\mathbf{A}$ の特異値分解を $\mathbf{A}=\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T$ とする。ここに $\mathbf{U},\mathbf{V}$ は直交行列、$\Sigma=diag\{\sigma_1,\cdots,\sigma_r,0,\cdots,0\}$（$m\times n$ 行列）、($\sigma_1\geq\cdots\geq\sigma_r>0,\ r\equiv rank(\mathbf{A})$)、$\sigma_1,\cdots,\sigma_r,0,\cdots,0$ は $\mathbf{A}$ の特異値を表す。簡単な計算によって、$\|\mathbf{A}\|_F{}^2=trace(\mathbf{A}^T\mathbf{A})=\sigma_1{}^2+\cdots+\sigma_r{}^2$。また、$\|\mathbf{A}\|_2{}^2=\sigma_1{}^2$ はすでに知っている。問題の不等式はこれらから得られる。■）

問題 14.11　（ベクトル p-ノルム）　この問題では $\mathbf{a}=[a_1\cdots a_n]^T\in\mathbf{R}^{n\times1}$（または $\mathbf{C}^{n\times1}$）の p-ノルム $\|\mathbf{a}\|_p=(|a_1|^p+\cdots+|a_n|^p)^{1/p}$ が実際にノルムの公理を満たすことを示す。$p=1,2,\infty$ の場合はすでにわかっているから、$p>1$、$p\neq\infty$ の場合のみを考える。三角不等式以外の要請が満足されることは単純な計算で確認できるから、この問題では三角不等式（別名、）$\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|_p\leq\|\mathbf{a}\|_p+\|\mathbf{b}\|_p$ のみの証明を考える。さらに $p-$ノルムの単調性および極限定理 $\|\mathbf{a}\|_p\to\|\mathbf{a}\|_\infty$ $(p\to0)$ の証明を行う。

(I)　$a,b\geq0$ なら $a^{1/p}b^{1/q}\leq\dfrac{a}{p}+\dfrac{b}{q}$（ただし、$p,q>1,\ \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$）を示せ。これは「相乗平均≤相加平均」すなわち、「$\sqrt{ab}\leq(a+b)/2$」の一般化を表す。

(II)　ヘルダーの不等式 Hoelder's inequality：$\sum_{i=1}^{n}|a_ib_i|\leq\|\mathbf{a}\|_p\|\mathbf{b}\|_q$ を示せ

（$\mathbf{a}=[a_1\cdots a_n]^T$, $\mathbf{b}=[b_1\cdots b_n]^T$）。 $p=q=2$ はコーシー・シュワルツの不等式に還元する。

(III)　三角不等式（<u>ミンコフスキーの不等式</u> Minkowski's inequality）: $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|_p \le \|\mathbf{a}\|_p+\|\mathbf{b}\|_p$

(IV) 単調性: $1\le s<t$ なら、任意の $\mathbf{a}=[a_1\cdots a_n]^T\in\mathbf{R}^{n\times 1}$（または $\mathbf{C}^{n\times 1}$）に対して、$\|\mathbf{a}\|_t^{\,t}\le\|\mathbf{a}\|_s^{\,s}$ が成り立つことを示せ。

(V)　$\|\mathbf{a}\|_p\to\|\mathbf{a}\|_\infty=\max|a_i|\ (p\to\infty)$ を示せ。

（略証　(I) $a,b>0$ としてよい。$0<k<1$ とし、関数 $f(x)=kx+1-k-x^k\,(x>0)$ を定義すると、$x\ge 1$ のとき $f(x)\ge 0$ （$\because$ $f(1)=0$、$x\ge 1$ なら $f'(x)=k(1-x^{k-1})\ge 0$）。直線 $y=kx+1-k$ は点 $(1,1)$ における曲線 $y=x^k$ への接線となっていることに注意。つぎに、$a\ge b$ なら $x=a/b(\ge 1),\ k=1/p$ とし、$a<b$ なら、$x=b/a,\ k=1/q$ とせよ。

(II) $\mathbf{a},\mathbf{b}\ne\mathbf{0}$ としてよい。 $a_i'=(a_i/\|\mathbf{a}\|_p)^p,\ b_i'=(b_i/\|\mathbf{b}\|_q)^q$ とおいて(I)の結果を利用すれば、

$$\frac{|a_ib_i|}{\|\mathbf{a}\|_p\|\mathbf{b}\|_q}\le\frac{|a_i|^p}{\|\mathbf{a}\|_p^{\,p}\,p}+\frac{|b_i|^q}{\|\mathbf{b}\|_q^{\,q}\,q}$$

が出る。i について和をとれば問題の不等式が出る。

(III) $\mathbf{a}+\mathbf{b}\ne\mathbf{0}$ としてよい。

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|_p^{\,p}&=\sum_{i=1}^n|a_i+b_i|^p=\sum_{i=1}^n|a_i+b_i||a_i+b_i|^{p-1}\le\sum_{i=1}^n|a_i||a_i+b_i|^{p-1}+\sum_{i=1}^n|b_i||a_i+b_i|^{p-1}\\&\equiv\sum_{i=1}^n|a_i||s_i|^{p-1}+\sum_{i=1}^n|b_i||s_i|^{p-1}\ (s_i\equiv a_i+b_i)\\&\le\|\mathbf{a}\|_p(\sum_{i=1}^n|s_i|^{(p-1)q})^{1/q}+\|\mathbf{b}\|_p(\sum_{i=1}^n|s_i|^{(p-1)q})^{1/q}\quad\text{（ヘルダーの不等式による）}\\&\le(\|\mathbf{a}\|_p+\|\mathbf{b}\|_p)(\sum_{i=1}^n|s_i|^p)^{1/q}\quad(\because\ (p-1)q=p)\\&\le(\|\mathbf{a}\|_p+\|\mathbf{b}\|_p)\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|_p^{\,p(1/q)}\le(\|\mathbf{a}\|_p+\|\mathbf{b}\|_p)\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|_p^{\,p-1}\quad(\because\ p-1=p/q)\end{aligned}$$

両辺を $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|_p^{\,p-1}$ で割れば問題の不等式が出る。

(IV) $a_1,\cdots,a_n$ を与えられた正数とすれば、関数 $f(x)\equiv(a_1^{\,x}+\cdots+a_n^{\,x})^{1/x}$ は $x>0$ で単調減少関数を表すこと、すなわち、「$x>0$ なら $f'(x)<0$」を示せば十分である。実際、

$\log f(x)=(1/x)\log(a_1^{\,x}+\cdots+a_n^{\,x})$（log は自然対数を表す）を微分し、整理すれば

$x^2(f'(x)/f(x)) = u_1 \log u_1 + \cdots + u_n \log u_n$ 、ただし $u_i \equiv a_i{}^x/(a_1{}^x + \cdots + a_n{}^x),\ i = 1, \cdots, n$ が得られる。$x > 0$ であるから、$0 < u_1, \cdots, u_n < 1$。ゆえに右辺は負の実数を表す。ゆえに $f'(x) < 0$。

(V) （補題） $(b + \varepsilon_k)^{1/k} \to 1\ (k \to 0)$ ここに $b \geq 1,\ \varepsilon_k \geq 0$ 、$\varepsilon_k \to 0\ (k \to \infty)$ 、k は自然数値のみを採るものとする。実際、$(b + \varepsilon_k)^{1/k} - 1 = x_k$ とおけば $x_k \geq 0$ 。ゆえに 2 項定理により $1 + kx_k \leq (1 + x_k)^k = b + \varepsilon_k$。これより $0 \leq x_k \leq (b - 1 + \varepsilon_k)/k \to 0$。ゆえに $x_k \to 0$、すなわち、$(b + \varepsilon_k)^{1/k} \to 1$ （補題証了)。つぎに $\|\mathbf{a}\|_p$ は $\|\mathbf{a}\|_p = (b + \varepsilon_p)^{1/p} \cdot \max|a_i|$ （b は高々 n の自然数、ε_p は $p \to \infty$ のとき、$\varepsilon_p \to 0$ となるような量）の形に書けることを確かめよ。すると、補題と(IV)から $\|\mathbf{a}\|_p \to \max|a_i| = \|\mathbf{a}\|_p$ が得られる。■）

問題 14.12 （行ベクトルの p -演算子ノルム）　与えられた $\mathbf{a}^T = \left[a_1 \cdots a_n\right] \in \mathbf{R}^{1 \times n}$ （または $\mathbf{C}^{1 \times n}$ ）の 1-、∞-、2-ノルムは、既知の行列演算子ノルムに関する結果を利用すれば、

$\left\|\mathbf{a}^T\right\|_1 = \max|a_i| = \|\mathbf{a}\|_\infty$ 、$\left\|\mathbf{a}^T\right\|_1 = \max|a_i| = \|\mathbf{a}\|_\infty$ 、$\left\|\mathbf{a}^T\right\|_2 = \sqrt{\mathbf{a}^T\mathbf{a}} = \|\mathbf{a}\|_2$ によって与えられる。一般に、$p, q > 1$、$(1/p) + (1/q) = 1$ なら、$\left\|\mathbf{a}^T\right\|_p = \|\mathbf{a}\|_q$ が成立することを示せ。ここに $\mathbf{a}^T$ の p -演算子ノルムは $\left\|\mathbf{a}^T\right\|_p = \max\{\left|\mathbf{a}^T\mathbf{x}\right| : \|\mathbf{x}\|_p = 1\}$ によって定義される。

（略証　前問で証明したヘルダーの不等式を使う。実際、$\|\mathbf{x}\|_p = \left\|\left[x_1 \cdots x_n\right]^T\right\|_p = 1$ を満たす任意の $\mathbf{x}$ に対して、$\left|\mathbf{a}^T\mathbf{x}\right| = \left|\sum a_i x_i\right| \leq \sum|a_i x_i| \leq \|\mathbf{a}\|_q \|\mathbf{x}\|_p$ （ヘルダーの不等式による） $= \|\mathbf{a}\|_q$。これより $\left\|\mathbf{a}^T\right\|_p \leq \|\mathbf{a}\|_q$ が得られる。ここで $x_i = |a_i|^q/(a_i \|\mathbf{a}\|_q{}^{q-1})(a_i \neq 0)$ 、$x_i = 0(a_i = 0)$ とすれば、$p + q = pq$ により、$\|\mathbf{x}\|_p = 1$、$\mathbf{a}^T\mathbf{x} = \|\mathbf{a}\|_q$ が成り立つ。上の結果と合わせると $\left\|\mathbf{a}^T\right\|_p = \|\mathbf{a}\|_q$ が出る。■）