レッスン２　ベクトル空間と線形変換

レッスン１では行列の考えとその算法について説明したが、行列算法と一部を共有するような算法をもつ抽象的な数理系を考え、その枠内で議論するとかえって見通しがよくなるような問題も多い。それのみならず、行列自体に関する問題の研究にもこのような抽象的な数理的概念が有効である場合もある。そのような概念がベクトル空間 vector space（線形空間 linear space）と線形変換 linear transformation（線形写像 linear map or mapping、線形作用素 linear operator）である。このレッスンでは行列算の復習後、重要概念の導入を行い、「線形代数の基本定理」を始め、基本的な事実をいくつか証明する。

このレッスン以降、「体 $\mathbf{F}$ 上の行列といえば、実行列か複素行列のどちらかを指す」ものとする。体の例として、有限個の元からなる体、有理数全体、 $x+y\sqrt{2}$ 型の数全体（ x, y は有理数)、なども知られているが、このコンテンツでこのような体上の行列を考えることはない。

2.1 行列算総括　これまでに定義された６種の行列演算「和 $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 、スカラー倍 $\alpha\mathbf{A}$ 、積 $\mathbf{AB}$ 、転置 $\mathbf{A}^T$ 、共役 $\overline{\mathbf{A}}$ 、共役転置 $\overline{\mathbf{A}}^T = \overline{\mathbf{A}^T} \equiv \mathbf{A}^*$ 」に関する算法をまとめよう。新たに記した公式には、明白なものを除いて、説明を付記してある。公式中「■印」の付いたものはとくに注意して記憶すべきものである。

(I)　複素数の算法から　複素数全体の集合を $\mathbf{C}$ と書き、実数全体の集合を $\mathbf{R}$ と書く。いま $u=a+ib,\ v=c+id \in \mathbf{C}\ (a,b,c,d \in \mathbf{R}, i^2=-1)$ とする。$\overline{u} \equiv a-ib$ を u の共役複素数といい、$|u| \equiv \sqrt{u\overline{u}} = \sqrt{a^2+b^2}$ を u の絶対値という。すると

$$\overline{u \pm v} = \overline{u} \pm \overline{v},\ \overline{uv} = \overline{u}\,\overline{v},\ \overline{u/v} = \overline{u}/\overline{v}(v \neq 0),$$

$$uv = 0 \Leftrightarrow u = 0 \text{ または } v = 0$$

$$|u| = 0 \Leftrightarrow u\overline{u} = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

(II)　和とスカラー倍　$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ を同じ型の行列とし、α, β をスカラー（体 $\mathbf{F}$ の元）とする。

1 結合則　$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} = \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$

2　交換則　$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}$

3　ゼロ元の存在：$\mathbf{A}+\mathbf{0} = \mathbf{A}$ を満たす、$\mathbf{A}$ に独立な元 $\mathbf{0}$ が存在する

4　各 $\mathbf{A}$ に対して $\mathbf{A}+(-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ を満たす（加法的）逆元 $-\mathbf{A}$ が存在する

5　結合則　$(\alpha\beta)\mathbf{A} = \alpha(\beta\mathbf{A})$

6　$1\mathbf{A} = \mathbf{A}$

7　分配則　$(\alpha+\beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$

8　分配則　$\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$

（III）積 以下 $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ は可積条件を満たすものとし、α はスカラーとする。

9　結合則 $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$

10 単位元の存在：$\mathbf{A}: m\times n$ なら、$\mathbf{I}_m\mathbf{A} = \mathbf{A},\ \mathbf{AI}_n = \mathbf{A}$ を満たす $\mathbf{A}$ に独立な元 $\mathbf{I}_m, \mathbf{I}_n$（単位行列）が存在する

11 結合則　$\alpha(\mathbf{AB}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\alpha\mathbf{B})$

12 分配則　$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$

13 分配則　$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$

（IV）転置、共役、共役転置　以下 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ は同じ型の複素行列、α を任意の複素数とする。

14 $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

15 $\overline{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}}$

16 $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^* = \mathbf{A}^* + \mathbf{B}^*$

■17　$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

18　$\overline{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{A}}\,\overline{\mathbf{B}}$

■19　$(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$

20　$(\alpha\mathbf{A})^T = \alpha\mathbf{A}^T$

21　$\overline{\alpha\mathbf{A}} = \overline{\alpha}\,\overline{\mathbf{A}}$

■22　$(\alpha\mathbf{A})^* = \overline{\alpha}\mathbf{A}^*$

（V）逆行列　以下 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ は同じ型の可逆行列、$\alpha \neq 0$ をスカラーとする。

23　$(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}$（証明：$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$ の転置を取る）

24　$(\overline{\mathbf{A}})^{-1} = \overline{\mathbf{A}^{-1}}$　（証明：$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$ の共役を取る）

25　$(\mathbf{A}^{-1})^* = (\mathbf{A}^*)^{-1}$（証明：$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$ の共役転置を取る）

■26　$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

■27　$(\alpha\mathbf{A})^{-1} = \alpha^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

（VI）ブロック算法

■28 積（ブロック行列版 row-by-column rule）

与えられた行列 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ を $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}\cdots\mathbf{A}_{1l} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{A}_{k1}\cdots\mathbf{A}_{kl} \end{bmatrix} : "k\times l",\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11}\cdots\mathbf{B}_{1p} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{B}_{l1}\cdots\mathbf{B}_{lp} \end{bmatrix} : "l\times p"$ 型に（「尻取り式」

に）分割する（区分けする）。このとき、$\mathbf{A}$ の第 i ブロック行 $\left[\mathbf{A}_{i1},\mathbf{A}_{i2},\cdots,\mathbf{A}_{il}\right]$、$\mathbf{B}$ の第 j ブロック列 $\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{1j}\\ \mathbf{B}_{2j}\\ \vdots\\ \mathbf{B}_{lj}\end{bmatrix}$ を任意に一組選び（例：$i=j=1$）、$\mathbf{A}_{i1}\mathbf{B}_{1j},\mathbf{A}_{i2}\mathbf{B}_{2j},\cdots,\mathbf{A}_{il}\mathbf{B}_{lj}$ がすべて可積であるかどうかを見る。もしそうならすべての i,j の値に対して $\mathbf{A}_{i1}\mathbf{B}_{1j},\mathbf{A}_{i2}\mathbf{B}_{2j},\cdots,\mathbf{A}_{il}\mathbf{B}_{lj}$ はすべて同型の行列となり、

$$\mathbf{A}_{i1}\mathbf{B}_{1j}+\mathbf{A}_{i2}\mathbf{B}_{2j}+\cdots+\mathbf{A}_{il}\mathbf{B}_{lj}\equiv\mathbf{C}_{ij}\quad(i=1,\cdots,k,\ j=1,\cdots,p)$$

と置けば、

$$\mathbf{AB}=\left[\mathbf{C}_{ij}\right]=\begin{bmatrix}\mathbf{C}_{11}\cdots\mathbf{C}_{1p}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \mathbf{C}_{k1}\cdots\mathbf{C}_{kp}\end{bmatrix}$$

すなわち、積の計算にブロック行列版 row-by-column rule が適用できる。

■29 転置

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}\cdots\mathbf{A}_{1l}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \mathbf{A}_{k1}\cdots\mathbf{A}_{kl}\end{bmatrix}:\ "k\times l"\quad \text{なら}\quad \mathbf{A}^T=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}{}^T\cdots\mathbf{A}_{k1}{}^T\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \mathbf{A}_{1l}{}^T\cdots\mathbf{A}_{kl}{}^T\end{bmatrix}:\ "l\times k"$$

すなわち、ブロック行列の転置を取るには、各ブロックがあたかも数であるかのように思って転置を取った後、各ブロックの転置を取ればよい。

　以上の行列算法のうち、ベクトル空間および線形変換の定義に拡張されるものは次の通りである：

(1)　和とスカラー倍に関する法則（II）1- 8　⇒　ベクトル空間の公理として使う

(2)　積に関する法則（III）11 -12　⇒　線形変換の公理として使う

　積に関する法則（III）9　⇒　線形変換の積の定義に使う

　積に関する法則（III）10　⇒　恒等変換の定義に使う

　積に関する法則（III）13　⇒　線形変換の和の定義に使う

次節以降で詳しく説明しよう。

2.2 ベクトル空間の公理

体 $\mathbf{F}$ 上のベクトル空間 vector space over $\mathbf{F}$ とは前節で述べた「和とスカラー倍に関する法則（II）1‐8」と同じ算法をもつ数理系をいう。すなわち、$\mathbf{V}$ がベクトル空間であるとは次の公理系が満たされることをいう：

$\mathbf{V}$ の任意元 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ に、和 sum と呼ばれる第３の元 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ を対応させる加法 addition “＋” および任意の $\alpha\in\mathbf{F}$ 、任意の $\mathbf{a}\in\mathbf{V}$ に、スカーラー倍 scalar multiplication と呼ばれる第３の元 $\alpha\mathbf{a}=\mathbf{a}\alpha$ を対応させるスカラー倍演算が定義され、その算法は次の法則を満たす（以下 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ は $\mathbf{V}$ の元、α,β をスカラーとする）：

1 結合則　$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$

2　交換則　$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$

3　ゼロ元の存在：$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$ を満たす、$\mathbf{a}$ に独立な元 $\mathbf{0}$ が存在する

4　各 $\mathbf{u}$ に対して $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$ を満たす（加法的）逆元 $-\mathbf{a}$ が存在する

5　結合則　$(\alpha\beta)\mathbf{a}=\alpha(\beta\mathbf{a})$

6　$1\mathbf{a}=\mathbf{a}$

7　分配則　$(\alpha+\beta)\mathbf{a}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{a}$

8　分配則　$\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$

厳密にいえば、ベクトル空間とは「体 $\mathbf{F}$ 、集合 $\mathbf{V}$ 、和、スカラー倍」を総合的に考えた数理系であるが、習慣上、$\mathbf{V}$ をベクトル空間といい、その元をベクトル vector と呼ぶ（体 $\mathbf{F}$ の元をスカラーと呼ぶことはすでにのべた）。また、実数体上のベクトル空間を単に実ベクトル空間 real vector space といい、複素数体上のベクトル空間を複素ベクトル空間 complex vector space という。

相等関係については、「回帰性 reflexivity $\mathbf{a}=\mathbf{a}$ 」、「対称性 symmetry $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ なら $\mathbf{b}=\mathbf{a}$ 」、「推移性 transitivity $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ かつ $\mathbf{b}=\mathbf{c}$ なら $\mathbf{a}=\mathbf{c}$ 」が満たされるのはむろん、「$\mathbf{a}=\mathbf{b},\mathbf{c}=\mathbf{d}$ なら $\mathbf{a}+\mathbf{c}=\mathbf{b}+\mathbf{d}$ 」、「$\alpha=\beta,\mathbf{a}=\mathbf{b}$ なら $\alpha\mathbf{a}=\beta\mathbf{b}$ 」が満たされることも暗黙裡に仮定されている。実行列、複素行列に対してはこれらの諸性質は実数体、複素数体における相等関係から継承され、成立しているわけである。

2.3 簡単な結果

以上の公理から直ちに出てくる結果をのべる。

(1) ゼロ元（ゼロベクトル）は一つしかない

証明　$\mathbf{0}_1,\mathbf{0}_2$ をゼロ元とすれば $\mathbf{0}_1=\mathbf{0}_1+\mathbf{0}_2$ （ゼロ元 $\mathbf{0}_2$ の性質）$=\mathbf{0}_2+\mathbf{0}_1$ （交換則）$=\mathbf{0}_2$ （ゼロ元 $\mathbf{0}_1$ の性質）■

(2) 逆元は一意的に決まる

証明　$\mathbf{a}+\mathbf{x}=\mathbf{0},\ \mathbf{a}+\mathbf{y}=\mathbf{0}$ なら $\mathbf{x}=\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}+(\mathbf{a}+\mathbf{y})=(\mathbf{x}+\mathbf{a})+\mathbf{y}=\mathbf{0}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{0}=\mathbf{y}$ ■

(3) 簡約則 cancellation law　$\mathbf{a}+\mathbf{x}=\mathbf{b}+\mathbf{x}$ なら $\mathbf{a}=\mathbf{b}$

証明 $\mathbf{a}=\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}+(\mathbf{x}+(-\mathbf{x}))=(\mathbf{a}+\mathbf{x})+(-\mathbf{x})=(\mathbf{b}+\mathbf{x})+(-\mathbf{x})=\mathbf{b}+(\mathbf{x}+(-\mathbf{x}))=\mathbf{b}+\mathbf{0}=\mathbf{b}$
■

(4) 簡約則：$\alpha \neq 0$ かつ $\alpha\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}$ なら $\mathbf{a} = \mathbf{b}$

証明　$\mathbf{a} = 1\mathbf{a} = (\frac{1}{\alpha}\alpha)\mathbf{a} = \frac{1}{\alpha}(\alpha\mathbf{a})$（結合則）$= \frac{1}{\alpha}(\alpha\mathbf{b}) = (\frac{1}{\alpha}\alpha)\mathbf{b} = 1\mathbf{b} = \mathbf{b}$ ■

(5)　$0\mathbf{a} = \mathbf{0}$

証明　$\mathbf{0} + 0\mathbf{a} = 0\mathbf{a} = (0+0)\mathbf{a} = 0\mathbf{a} + 0\mathbf{a}$（分配則）。ゆえに $\mathbf{0} + 0\mathbf{a} = 0\mathbf{a} + 0\mathbf{a}$。簡約則により $\mathbf{0} = 0\mathbf{a}$ ■

(6)　$-\mathbf{a} = (-1)\mathbf{a}$

証明　$\mathbf{0} = 0\mathbf{a}$（(4)による）$= (1+(-1))\mathbf{a} = 1\mathbf{a} + (-1)\mathbf{a}$（分配則）$= \mathbf{a} + (-1)\mathbf{a}$（$1\mathbf{a} = \mathbf{a}$ による）。逆元の一意性より $-\mathbf{a} = (-1)\mathbf{a}$ ■

(7)　一般結合則：和 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \cdots + \mathbf{c}$ は加える順序にもベクトルの並ぶ順序にもよらない。

略証　和の結合則と交換則から従う。■

2.4 ベクトル空間の例

　ベクトル空間という考えの広さを示すための例をあげる。

例１　体 $\mathbf{F}$ 上の $m \times n$ 行列全体 $\mathbf{F}^{m \times n}$（m, n は任意かつ特定の自然数）は体 $\mathbf{F}$ 上のベクトル空間の雛形である。また $\mathbf{F}$ の元（スカラー）の順序付 n タプル ordered n-tuple 全体、すなわち $(x_1, \cdots, x_n)$ 型のスカラーの組全体、も $1 \times n$ 行列に準じて和とスカラー倍を定義すればベクトル空間となることは明らか。この空間はよく記号 $\mathbf{F}^n$ で表される。

例２　任意の（空でない）集合 X 上で定義された実関数全体 $F(X, \mathbf{R})$ を考える。$f, g \in F(X, \mathbf{R})$ に対して「$f = g$ とはすべての $x \in X$ に対して $f(x) = g(x)$ であること」と定義する。ここに最後の“＝”は実数の相等を表す。そして、和、スカラー倍を次のように定義すれば $F(X, \mathbf{R})$ は実ベクトル空間となる：:

和: $f, g \in F(X, \mathbf{R})$ の和 $f + g$ とは $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ $(x \in X)$ によって定義される関数 $f + g \in F(X, \mathbf{R})$ をいう。“$f + g$”なる関数を定義するには X の各元における値を定義すればよく、元 $x \in X$ における $f + g$ の値とはその点における $f, g \in F(X, \mathbf{R})$ の値の和（実数の和）であると定義するのである。

スカラー倍：$\alpha \in \mathbf{R}, f \in F(X, \mathbf{R})$ に対してスカラー倍 αf とは $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ によって定義される $\alpha f \in F(X, \mathbf{R})$ をいう。すなわち、点 $x \in X$ における αf の値とは実数の積 $\alpha \cdot f(x)$ と定義される。

　このように和とスカラー倍を定義すると $F(X, \mathbf{R})$ はベクトル空間の公理をすべて満たす。とくに、$\mathbf{0}$ に相当するものはすべての $x \in X$ に対して $\mathbf{0}(x) = 0$、で定義される関数、逆元 $-f$ とはすべての $x \in X$ に対して $(-f)(x) = -(f(x))$ で定義される関数をとればよい。

例３　実用性には乏しいが、一度は体験して頂きたい例を出す。正の実数全体を $\mathbf{R}^+$ と書こう。以下の和とスカラー倍の定義により $\mathbf{R}^+$ は実ベクトル空間となる：

和　$x + y = xy$（左辺がベクトルの和を表し、右辺は通常の実数の積、確かに $x + y \in \mathbf{R}^+$）

スカラー倍　$\alpha x = x^\alpha$（左辺がスカラー倍の定義を表し、右辺は通常の実数の冪乗、確かに

$\alpha x \in \mathbf{R}^+$）
また$\mathbf{0}=1$（$\because x+1=x1=x$）、$-x=1/x$（$\because x+(1/x)=x(1/x)=1=\mathbf{0}$）
結合則その他もすべて満たされることを検算して頂きたい。

例 4　この例は「スカラーに要注意」の例としてあげる。$m\times n$複素行列全体$\mathbf{C}^{m\times n}$は実ベクトル空間としても複素ベクトル空間としても考えることができる。前者の場合、スカラーとは実数を意味する。$\mathbf{C}^{m\times n}$はふつう複素ベクトル空間として扱うが、スカラーを実数に制限してもベクトル空間の公理は満たされるので、実ベクトル空間を表す。両者は同じではない。後ほど説明するように、複素ベクトル空間としての次元はmn、実ベクトル空間としての次元は$2mn$となる。

例 5 実ベクトル空間の複素化 complexification　$\mathbf{V}$を任意の実ベクトル空間とすれば、新たに$\mathbf{a}+i\mathbf{b}$型の元（$\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbf{V}, i^2=-1$）全体を考えこれに通常の仕方で和とスカラー倍を

$(\mathbf{a}+i\mathbf{b})+(\mathbf{c}+i\mathbf{d})=(\mathbf{a}+\mathbf{c})+i(\mathbf{b}+\mathbf{d})$、

$(\alpha+i\beta)(\mathbf{a}+i\mathbf{b})=\alpha\mathbf{a}-\beta\mathbf{b}+i(\beta\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b})$

のように定義すれば、複素ベクトル空間が得られる。こうして得られた複素ベクトル空間において、ベクトルを$\mathbf{a}+i\mathbf{0}$型のものに限定し、スカラーも実数に限定すればもとの実ベクトル空間に帰る（詳細略)。

2.5　集合論から Part I（Part II は 2.20 節）

線形変換の説明に入る前に、一般集合論からの重要キーワードを簡単に復習しておくのが今後の説明に便利である。一般に（空でない）集合Xの任意の元（点ともいう）xに（空でない）集合Yのひとつの元（点）yを対応させせたとき、「XからYへの関数 function（変換 transformation、写像 map、作用素 operator）が定義された」といい、xにおけるこの関数の値はyである、といういいかたをする。そしてこの関数をfと呼ぶ場合、$y=f(x)$、$f:x\mapsto y$、あるいは単に、$x\mapsto y$とも書く。集合Xを定義域（変域）domain of definition、Yを像空間 image space、xを独立変数 independent variable、yを従属変数 dependent variable、特定のx対応するYの元yをxの像 image または値 value、xをその原像 pre-image、像y全体の集合を$f(X)$と書いてfの値域 range という。また対$(x,f(x))$全体の集合をfのグラフ graph という。

「$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$」(「$x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$」と同値)」を満たす$f$を単射 injection, one-to-one function、fの値域が像空間Yと一致する場合fを全射 surjection, onto function という。全射かつ単射であれば全単射という。またYの任意の部分集合Y_1の原像全体（$f(x)\in Y_1$となるような$x\in X$の全体）をY_1の逆像 inverse image といい、$f^{-1}(Y_1)$で表す。
XからYへの関数全体の集合はよく$F(X,Y)$のように書かれる（前節例 2 で考えた$F(X,\mathbf{R})$はこの書き方の一例である)。

$f,g\in F(X,Y)$の相等は「$f=g$とはすべての$x\in X$に対して$f(x)=g(x)$であること

（この“＝”はY上の相等)」と定義される。

2.6　線形変換（線形写像）

2.1 から行列積の結合則、分配則を再掲すると（便宜上「結合則 11」を二つに分けて書く）：

12 分配則　$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$

11a 結合則　$\alpha(\mathbf{AB})=\mathbf{A}(\alpha\mathbf{B})$

11b 結合則　$(\alpha\mathbf{A})\mathbf{B}=\alpha(\mathbf{AB})$

13 分配則　$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}$

9 結合則　$(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})$

いくらか記号を改めると

12　分配則　$\mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{x}')=\mathbf{Ax}+\mathbf{Ax}'$

11a　結合則　$\alpha(\mathbf{Ax})=\mathbf{A}(\alpha\mathbf{x})$

11b　結合則　$(\alpha\mathbf{A})\mathbf{x}=\alpha(\mathbf{Ax})$

13 分配則　$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{x}=\mathbf{Ax}+\mathbf{Bx}$

9 結合則　$(\mathbf{AB})\mathbf{x}=\mathbf{A}(\mathbf{Bx})$

この最初の 2 法則（12、11a）が線形変換の公理として採用される。すなわち、同じ体$\mathbf{F}$上のベクトル空間$\mathbf{X}$から第 2 のベクトル空間$\mathbf{Y}$への変換（写像）（略してベクトル変数のベクトル関数ともいう）$\mathbf{A}$が線形変換であるとは和とスカラー倍が次式を満たすことをいう：すなわち、任意の$\mathbf{x},\mathbf{x}'\in\mathbf{X}$、任意のスカラー$\alpha\in\mathbf{F}$に対して

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}+\mathbf{x}')=\mathbf{Ax}+\mathbf{Ax}'、\alpha(\mathbf{Ax})=\mathbf{A}(\alpha\mathbf{x})$$

いいかえると「和の変換は変換の和」「スカラー倍の変換は変換のスカラー倍」が成り立つ。この性質を重ね合わせの原理 principle of superposition とも呼ぶ。

続く 2 法則（11b、13）は$\mathbf{X}$から$\mathbf{Y}$への一般の変換（線形および非線形変換 non-linear transformation）のスカラー倍と和の定義に拡張される：

スカラー倍の定義　$(\alpha\mathbf{A})\mathbf{x}=\alpha(\mathbf{Ax})$（$\alpha\mathbf{A}$の$\mathbf{x}\in\mathbf{X}$における値は$\alpha(\mathbf{Ax})\in\mathbf{Y}$である）

和の定義　$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{x}=\mathbf{Ax}+\mathbf{Bx}$　（$\mathbf{A}+\mathbf{B}$の$\mathbf{x}\in\mathbf{X}$における値は$\mathbf{Ax}+\mathbf{Bx}$であると定義）

この和とスカラー倍の定義により、$\mathbf{X}$から$\mathbf{Y}$への線形変換全体はベクトル空間となる（ベクトル空間の公理系を満たす）。

最後の法則（9）は変換の積の定義に拡張される：$\mathbf{B}$を$\mathbf{X}$から$\mathbf{Y}$への変換、$\mathbf{A}$を$\mathbf{Y}$から同じ体$\mathbf{F}$上の第 3 のベクトル空間$\mathbf{Z}$への変換とすると：

積（合成変換）の定義　$(\mathbf{AB})\mathbf{x}=\mathbf{A}(\mathbf{Bx})$

すなわち、$\mathbf{AB}$の$\mathbf{x}\in\mathbf{X}$における値とは$\mathbf{A}(\mathbf{Bx})\in\mathbf{Z}$であると定義する。

2.7 線形変換の例

ベクトル空間という概念の広さは前節の例で見たとおりである。したがって線形変換の概念も相応に広い。いくつかの例から見てみよう。

例１　各 $\mathbf{A}\in\mathbf{R}^{m\times n}$ （各 $m\times n$ 実行列 $\mathbf{A}$ ）に対応して次式で定義される変換 $f_{\mathbf{A}}$ ：

(1) $\mathbf{y}=f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})=\mathbf{A}\mathbf{x}$ （$\mathbf{x}\in\mathbf{R}^{n\times1},\ \mathbf{y}\in\mathbf{R}^{m\times1}$）すなわち、$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

は $\mathbf{R}^{n\times1}$ から $\mathbf{R}^{m\times1}$ への線形変換をあらわす。これは前節で見た線形変換の雛形である。

相等関係をチェックすると： $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbf{R}^{m\times n}$ に対して

(2) $f_{\mathbf{A}}=f_{\mathbf{B}} \Leftrightarrow$ すべての $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^{n\times1}$ に対して $f_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})=f_{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$

$\Leftrightarrow$ すべての $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^{n\times1}$ に対して $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{B}\mathbf{x}$

$\Leftrightarrow\ \mathbf{A}=\mathbf{B}$

（最後の“$\Leftrightarrow$”の証明：（$\Rightarrow$） $\mathbf{x}=\mathbf{e}_j=n$ 次第 j 単位ベクトル、 $j=1,\cdots,n$ をとればよい。

（$\Leftarrow$）：明白）

(1)の転置をとると、$\mathbf{y}^T=\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T$ 、すなわち、$\begin{bmatrix} y_1\cdots y_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1\cdots x_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

これは $\mathbf{R}^{1\times n}$ から $\mathbf{R}^{1\times m}$ への線形変換を表している。

例２　2.5 節で定義した任意の集合 X 上で定義された実関数全体の集合 $F(X,\mathbf{R})$ は通常の和とスカラー倍の定義により実ベクトル空間となる。実数全体 $\mathbf{R}$ も和と積に関して実ベクトル空間の公理を満たすから実ベクトル空間である。そこで X 内の特定の元 x_0 をとり、

(1) $\widehat{x_0}(f)=f(x_0)\in\mathbf{R}$

によって定義される $F(X,\mathbf{R})$ から $\mathbf{R}$ への変換 $\widehat{x_0}$ を定義する。$\widehat{x_0}$ は各 $f\in F(X,\mathbf{R})$ に、固定された点 x_0 における値を対応させる変換を表す。これも線形変換の例を表す。実際、

任意の $f,g\in F(X,\mathbf{R}),\ \alpha\in\mathbf{R}$ に対して

$\widehat{x_0}(f+g)=(f+g)(x_0)=f(x_0)+g(x_0)=\widehat{x_0}(f)+\widehat{x_0}(g)$、

$\widehat{x_0}(\alpha f)=(\alpha f)(x_0)=\alpha\cdot f(x_0)=\alpha\widehat{x_0}(f)$

線形変換 $\widehat{x_0}$ は<u>点評価汎関数</u> point evaluation functional と呼ばれる。

例 3　実区間 $0<x<1$ 上で定義された実係数多項式 $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$

（$a_0(\neq 0), a_1, \cdots, a_n$ は実数、$n = 0,1,2,\cdots$）の全体 $\mathbf{P}$ は通常の和とスカラー倍（実数倍）に関して実ベクトル空間を作る。いま $\mathbf{P}$ から $\mathbf{P}$ への（微分）変換 $\mathbf{D}$ を

$$(\mathbf{D}p)(x) = (d/dx)p(x) = a_0 n x^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + \cdots + a_1$$

によって定義すると、$\mathbf{D}$ も $\mathbf{P}$ から $\mathbf{P}$ への線形変換を表す。また、変換 $\mathbf{T}$（0 から 1 までの定積分）を

$$(\mathbf{T}p)(x) = \int_0^1 p(x)dx$$

によって定義すると、$\mathbf{T}$ は $\mathbf{P}$ から $\mathbf{R}$ への線形変換（線形汎関数）を表す。

2.8　線型方程式 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

　いま、$\mathbf{A}$ を与えられた実または複素ベクトル空間 X から第２の実または複素ベクトル空間 Y への線形変換とし、方程式

(1)　$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

を考える。ここに $\mathbf{b} \in Y$ は既知ベクトル、$\mathbf{x} \in X$ は未知ベクトルを表す。(1)の解が存在すればその一つ一つを<u>特解</u> particular solution という。(1)の特解 $\mathbf{x}_0$ が一つ知られれば、(1)の任意解（<u>一般解</u> general solution ともいう）$\mathbf{x}$ は $\mathbf{x}_0$ と<u>同次方程式</u> homogeneous equation $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ の任意解の和によって与えられる：

(2)　$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1$（$\mathbf{x}_1 = \mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ の任意解）

証明　$\mathbf{x}_0$ を(1)の特解、任意解を $\mathbf{x}$ とすれば、$\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{Ax} - \mathbf{Ax}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$。ゆえに $\mathbf{x}_1 \equiv \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ は同次方程式の解を表す。そして $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1$。逆に、$\mathbf{x}_0$ を(1)の特解、$\mathbf{x}_1$ を同次方程式の任意解とすれば、$\mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1) = \mathbf{Ax}_0 + \mathbf{Ax}_1 = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$。ゆえに $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1$ は(1)の解を表す。■

　同次方程式に対してもとの $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 型方程式を<u>非同次方程式</u> non-homogeneous equation という。

例　方程式 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ の解を求める問題を考える。$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ はその特解の一つを表す。同次方程式 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ の実解は簡単な計算によって $\mathbf{x}_1 = c\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$（$c$ は任意実数）の形で与えられる。ゆえにもとの方程式のすべての実解は $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ で与えられる。複素解を考えると、同様の計算によってそれは $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (c + id)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ によって与えらる（c, d は任意の実数）。

2.9 一次結合

ベクトル空間内の有限個の元（ベクトル）のスカラー倍の和をこれらのベクトルの一次結合 linear combination という。「線形代数は一次結合の数学」といえるくらい、この概念は重要である。一次結合の一般形は

(1) $c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\cdots+c_k\mathbf{v}_k$

である。ここに、k は自然数、$c_1,\cdots,c_k$ はスカラー、$\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_k$ はベクトルを表す。$\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_k$ はすべては相異なるとは限らない。(1)型の式は $\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_k$ をあたかも列ベクトルと思って形式的な行列積

(2) $$c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\cdots+c_k\mathbf{v}_k=\left[\mathbf{v}_1\cdots\mathbf{v}_k\right]\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_k\end{bmatrix}$$

と書くと計算の見通しがよくなることが多い。あるいは行ベクトルのように思って

(3) $$c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\cdots+c_k\mathbf{v}_k=\left[c_1\cdots c_k\right]\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1\\ \vdots\\ \mathbf{v}_k\end{bmatrix}$$

と書いてもよい。

2.10 一次独立性と一次従属性

体 $\mathbf{F}$ 上のベクトル空間 $\mathbf{V}$ 内の有限個のベクトル $\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_k$ に対してその一次結合が $\mathbf{0}$ となるのは係数がすべて 0 である場合に限るとき、すなわち、$c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_k\mathbf{v}_k=\mathbf{0}$ が成り立つのは $c_1=\cdots=c_k=0$ のときに限るとき、集合 $\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_k\}$、あるいは単にベクトル $\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_k$、は一次独立である linearly independent であるといい、そうでなければ一次従属である linearly dependent という。後者の場合、0 でない係数をもつベクトルについて $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_k\mathbf{v}_k=\mathbf{0}$ を解けばそのベクトルが他のベクトルの一次結合として表現できることは明らかである。例えば、$c_1\neq 0$ なら、$\mathbf{v}_1=(-c_2/c_1)\mathbf{v}_2\cdots+(-c_k/c_1)\mathbf{v}_k$ （ただし $k>1$ としている）。

以上の定義から、「一次独立な集合の部分集合はかならず一次独立であり、一次従属な集合を部分集合として含む集合はかならず一次従属である」ことがわかる。

複素ベクトル空間内の一次従属な集合が、スカラーを実数に限定すると（すなわち、これによって得られた実ベクトル空間内のベクトルの集合として考えると）、一次独立になることがあるので、スカラーとして何が考えられているのかについて常に注意が必要である。

次の補題は実用性の高いものであるから記憶するとよい：

補題　$\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_k\}$ を一次独立、$\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_k,\mathbf{x}\}$ を一次従属とすれば、$\mathbf{x}$ は $\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_k$ の一次結合として一意的に展開できる。

証明　$\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_k,\mathbf{x}\}$ が一次従属なら、(*) $c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_k\mathbf{v}_k+d\mathbf{x}=\mathbf{0}$ がすべては 0 でないスカラ

一$c_1,\cdots,c_k,d$の値に対して成り立つ。この場合、実は$d\neq 0$である。なぜなら、仮に$d=0$とすれば、$c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_k\mathbf{v}_k=\mathbf{0}$となり、$\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_k\}$の一次独立性より、$c_1=\cdots=c_k=0$。これは$c_1,\cdots,c_k,d$のすべては0でないという仮定に反する。そこで、(*)を$\mathbf{x}$について解くと、$\mathbf{x}=(-c_1/d)\mathbf{v}_1+\cdots+(-c_k/d)\mathbf{v}_k$が得られる。展開の一意性を示す。実際、$\mathbf{x}=a_1\mathbf{v}_1+\cdots+a_k\mathbf{v}_k=b_1\mathbf{v}_1+\cdots+b_k\mathbf{v}_k$なら、$(a_1-b_1)\mathbf{v}_1+\cdots+(a_k-b_k)\mathbf{v}_k=\mathbf{0}$。$\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_k\}$の一次独立性より$a_1-b_1=\cdots=a_k-b_k=0$が得られる。■

例１ $\{\mathbf{0}\}$は一次従属である（$\because$ 任意のスカラーcに対して$c\mathbf{0}=\mathbf{0}$）。逆に、1個のベクトルからなる集合$\{\mathbf{v}_1\}$が一次従属であれば、$\mathbf{v}_1=\mathbf{0}$でなければならない。つぎに、$c_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\mathbf{0}$は明らかに$c_1=c_2=0$を意味するから、$\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\}$は一次独立である。また$(-2)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}=\mathbf{0}$であるから、$\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\}$は一次従属である。以上の結論はスカラーを複素数とした場合でも、実数に限定した場合でも変わらない。■

例 2　$m\times n$実行列の与えられた集合$\{\mathbf{A}_1,\cdots,\mathbf{A}_k\}$に対して、係数を実数に限定すれば、$c_1\mathbf{A}_1+\cdots+c_k\mathbf{A}_k=\mathbf{0}$は$c_1=\cdots=c_k=0$を意味するとしよう（すなわち、実ベクトル空間内で考えると一次独立となるとしよう）。この場合は、係数に複素数値を許しても、やはり$\{\mathbf{A}_1,\cdots,\mathbf{A}_k\}$は一次独立となる（複素ベクトル空間内で考えても一次独立となる）。実際、

$$\mathbf{0}=(\alpha_1+i\beta_1)\mathbf{A}_1+\cdots+(\alpha_k+i\beta_k)\mathbf{A}_k=\alpha_1\mathbf{A}_1+\cdots+\alpha_k\mathbf{A}_k+i(\beta_1\mathbf{A}_1+\cdots+\beta_k\mathbf{A}_k)$$

（$\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\beta_1,\cdots,\beta_k$は実数）なら、実部と虚部はともに$\mathbf{0}$でなければならないから、$\mathbf{0}=\alpha_1\mathbf{A}_1+\cdots+\alpha_k\mathbf{A}_k$ と$\mathbf{0}=(\beta_1\mathbf{A}_1+\cdots+\beta_k\mathbf{A}_k)$が同時に成立するはずである。仮定により、これは$\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\beta_1,\cdots,\beta_k$がすべて0であることを意味する。■

例 3　1×1複素行列全体$\mathbf{C}^{1\times 1}$（$\mathbf{C}$そのもの）の作る複素ベクトル空間に対して、スカラーを実数に限定すると、実ベクトル空間となる。すると集合$\{[1],[i]\}$は複素ベクトル空間内で考えれば一次従属だが（$\because [1]+i[i]=[1+i^2]=[0]$）、スカラーを実数に限定した場合は、

$\mathbf{0}=c_1[1]+c_2[i]=[c_1+c_2i]\Leftrightarrow c_1=c_2=0$（$\because$ c_1,c_2は実数）ゆえ、一次独立となる。■

（注意）例 2、例 3 を混同しないように。例 2 では実行列、例 3 では複素行列を問題にしている。

　これまでの一次独立・一次従属の定義を拡張し、ベクトル空間$\mathbf{V}$の部分集合$\mathbf{S}$のすべての有限部分集合が一次独立であるとき、$\mathbf{S}$は一次独立であるといい、そうでなければ一次従属であるという。例えば、閉区間$0\le x\le 1$上で定義された実関数全体の作る実ベクトル空間の無限部分集合$\{1,x,x^2,\cdots,x^k,\cdots\}$は、どの有限部分集合も（これまでの意味で）一次独立であるから、一次独立である。

2.11　線形代数の基本定理

次の事実を線形代数の基本定理 fundamental theorem of linear algebra という：

「体 $\mathbf{F}$ 上のベクトル空間内の n 個のベクトル $\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n$ の $n+1$ 個の一次結合

(1)　$\mathbf{b}_j = a_{1j}\mathbf{a}_1 + \cdots + a_{nj}\mathbf{a}_j \,(j=1,\cdots,n+1)$

はかならず一次従属である」

すなわち、行列方程式

(2)　$\mathbf{0} = \begin{bmatrix}\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_{n+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots \\ c_{n+1}\end{bmatrix} = (\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1,n+1}\\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n+1}\end{bmatrix})\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots \\ c_{n+1}\end{bmatrix}$ は解 $\begin{bmatrix}c_1 \cdots c_{n+1}\end{bmatrix}^T \neq \mathbf{0}$ をもつ

形式的な積に対して“結合則”が成り立つので（検算はラーナーにお任せする)、これは

(3)　$\mathbf{0} = \begin{bmatrix}\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_{n+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots \\ c_{n+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n\end{bmatrix}(\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1,n+1}\\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots \\ c_{n+1}\end{bmatrix})$

と書いてよいから、(2)が非零解もつことを示すには、

(4)　$\mathbf{0} = \begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1,n+1}\\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots \\ c_{n+1}\end{bmatrix}$ の形の行列方程式はかならず解 $\begin{bmatrix}c_1 \cdots c_{n+1}\end{bmatrix}^T \neq \mathbf{0}$ をもつ

ことを示せばよい。これはレッスン 5 において、同値分解の応用として示す「線形代数の基本定理」そのものである。本節の事実は名称値する、応用の広い事実である。

証明　本節では同値分解（レッスン 4）によらない証明を示す。すなわち、古くから”exchange process”（交換法）と呼ばれる有名な証明法を使う。例を用いてその核心部分を説明し、一般化はラーナーにお任せすることにする。そこで、例として $n=2$ の場合

$\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1 a_{11} + \mathbf{a}_2 a_{21}$、$\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}_1 a_{12} + \mathbf{a}_2 a_{22}$、$\mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_1 a_{13} + \mathbf{a}_2 a_{23}$

をとり、$\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3\}$ は一次従属でなければならないことを示す。まず、第 1 式で $a_{11}=a_{21}=0$ なら $\mathbf{b}_1=\mathbf{0}$ となるから $\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3\}$ 明らかに一次従属となる。そこで必要なら番号の付け替えを行って $a_{11}\neq 0$ とする。最初の式を $\mathbf{a}_1$ について解き、結果をそれ以下の式に代入すると、

$\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_1 b_{12} + \mathbf{a}_2 b_{22}$、$\mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_1 b_{13} + \mathbf{a}_2 b_{23}$

型の式が得られる。この 2 式の右辺を元の式と比べると $\mathbf{a}_1$ が $\mathbf{b}_1$ に交換された形となっている(交換法という名前の由来)。直前の第 1 式において $b_{22}=0$ なら $\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2\}$ は一次従属となり、したがって $\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3\}$ も一次従属となるから、$b_{22}\neq 0$ としよう。そこでこれを $\mathbf{a}_2$ について解き、第 2 式に代入すると、$\mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_1 c_{13} + \mathbf{b}_2 c_{23}$ 型の式が得られる。これは $\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3\}$ が一次従属であ

ることを示す。■

2.12　部分空間

ベクトル空間中のベクトル空間を部分空間 subspace という。すなわち、与えられたベクトル空間 $\mathbf{V}$ の空でない部分集合 $\mathbf{S}$ が部分空間であるとは、それが和とスカラー倍に関して閉じている closed こと、すなわち、$\mathbf{S}$ 内の任意のベクトル $\mathbf{x},\mathbf{y}$ 、任意のスカラー α に対して、$\mathbf{x}+\mathbf{y}$ も $\alpha\mathbf{x}$ も $\mathbf{S}$ に属することをいう。$\mathbf{S}$ 内の任意のベクトル $\mathbf{x},\mathbf{y}$ 、任意のスカラー α,β に対して $\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}$ が $\mathbf{S}$ に属することといっても同じである。ゆえに部分空間はかならずベクトル $\mathbf{0}$ を含む。簡単な例をあげよう。

例 1　$\mathbf{S}=\{\mathbf{0}\}$ （$\mathbf{0}$ だけを含む集合）と $\mathbf{S}=\mathbf{V}$ （全空間）はつねに $\mathbf{V}$ の部分空間である。

例 2　実ベクトル空間 $\mathbf{R}^{3\times1}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ 型実行列全体の集合、をとる。$\mathbf{S}_0=\{\mathbf{0}\}$ 、$\mathbf{S}_1=t\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$ 型行列全体（t は任意の実数値をとる）、$\mathbf{S}_2=s\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$ 型行列全体（s,t は任意の実数値をとる）、$\mathbf{S}_3=\mathbf{R}^{3\times1}$ はどれも $\mathbf{R}^{3\times1}$ の部分空間である。通常の 3 次元空間と $\mathbf{R}^{3\times1}$ を同一視すれば、$\mathbf{S}_0$ は座標系の原点を、$\mathbf{S}_1$ は原点を通る直線を、$\mathbf{S}_2$ は原点を通る平面を、$\mathbf{S}_3$ は空間全体を表す。原点を含まない部分集合はどれも部分空間ではない。

例 3　$\mathbf{S},\mathbf{T}$ をベクトル空間 $\mathbf{V}$ の部分空間とすれば、共通部分 $\mathbf{S}\cap\mathbf{T}$ も和 $\mathbf{S}+\mathbf{T}$ （$\mathbf{s}+\mathbf{t}$ 型の和全体、ただし、$\mathbf{s}\in\mathbf{S},\mathbf{t}\in\mathbf{T}$ ）も $\mathbf{V}$ の部分空間である。これは部分空間の定義から直ちに従う。

合併集合 $\mathbf{S}\cup\mathbf{T}$ は一般に部分空間とはならない。反例：$\mathbf{V}=\mathbf{R}^{1\times2}=\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}$ 型実行列全体とし、$\mathbf{S}=\begin{bmatrix}x & 0\end{bmatrix}$ 型実行列全体、$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}0 & y\end{bmatrix}$ 型実行列全体とすれば、$\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\in\mathbf{S},\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\in\mathbf{T}$ に対して和 $\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$ は $\mathbf{S}\cup\mathbf{T}$ に属さない。

2.13 スパン

与えられた体 $\mathbf{F}$ 上のベクトル空間 $\mathbf{V}$ の空でない部分集合 $\mathbf{S}$ のスパン span とは $\mathbf{S}$ 内のベクトルから作った一次結合全体の集合をいう。すなわち、$c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_k\mathbf{v}_k$ 型ベクトル（$c_1,\cdots,c_k$ はスカラー、$\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_k$ は $\mathbf{S}$ に属するベクトル、k は任意の自然数）全体の集合を $\mathbf{S}$ のスパンといい、$span\ \mathbf{S}$ と書く。定義より $\mathbf{S}\subseteq span\ \mathbf{S}$ は明らか。また $\mathbf{S}$ 自身が部分空間であることと $\mathbf{S}=span\ \mathbf{S}$ であることは同値である。

さらに次の事実が成り立つ：$span\ \mathbf{S}$ は $\mathbf{S}$ を含む最小の部分空間を表す。
実際、$\mathbf{S}$ 内のベクトルから作った一次結合の和もスカラー倍もやはり $\mathbf{S}$ 内のベクトルから作った一次結合であるから、$span\ \mathbf{S}$ は $\mathbf{V}$ の一つの部分空間を表す。つぎに、最小性、すなわち、$\mathbf{S}$ を含む任意の部分空間 $\mathbf{S}_1$ に対して $span\ \mathbf{S} \subseteq \mathbf{S}_1$ が成り立つことを示す。実際、$\mathbf{S}$ 内のベクトルから作った任意の一次結合は $\mathbf{S}_1$ 内のベクトルの一次結合でもあるから、$\mathbf{S}_1$ が部分空間であることにより、$\mathbf{S}_1$ に属する。ゆえに $span\ \mathbf{S}$ の任意元は $\mathbf{S}_1$ に属する。

この事実から、$span\ \mathbf{S}$ はまた $\mathbf{S}$ によって張られたまたは生成された部分空間 subspace spanned or generated by $\mathbf{S}$ とも呼ばれる。与えられた部分空間 $\mathbf{M}$ に対して $\mathbf{M} = span\ \mathbf{S}$ なら、$\mathbf{S}$ は $\mathbf{M}$ を張る to span という。

例　$\mathbf{R}^{3\times1}$ の部分空間 $\mathbf{S}_1 = t\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$ 型行列全体（t は任意の実数値をとる）、$\mathbf{S}_2 = s\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$ 型行列全体（s, t は任意の実数値をとる）を考えると、$\mathbf{S}_1 = span\{\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\}$、$\mathbf{S}_2 = span\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\}$。

2.14 線形変換の零空間（核）と値域

同じ体 $\mathbf{F}$ 上のベクトル空間 $\mathbf{X}$ からベクトル空間 $\mathbf{Y}$ への線形変換 $\mathbf{A}$ の零空間 null space（核 kernel）とは $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ の解全体をいう。また、値域 range とは、すでにのべたように、$\mathbf{x}$ が空間 $\mathbf{X}$ 全体を動いたときの像 $\mathbf{Ax}$ 全体をいう。$\mathbf{A}$ の零空間を $N(\mathbf{A})$ で表し、値域を $R(\mathbf{A})$ で表すことにする。次の事実は重要である：

「$N(\mathbf{A})$ は $\mathbf{X}$ の部分空間、$R(\mathbf{A})$ は $\mathbf{Y}$ の部分空間である」

証明　$N(\mathbf{A})$ も $R(\mathbf{A})$ も和とスカラー倍に関して閉じていることを示せばよい。そこで、$\alpha, \beta \in \mathbf{F},\ \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in N(\mathbf{A})$ とすれば、$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}') = \alpha\mathbf{Ax} + \beta\mathbf{Ax}' = \alpha\mathbf{0} + \beta\mathbf{0} = \mathbf{0}$。ゆえに、$\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}' \in N(\mathbf{A})$。つぎに、$\alpha, \beta \in \mathbf{F},\ \mathbf{y}, \mathbf{y}' \in R(\mathbf{A})$ とすれば、$\mathbf{y} = \mathbf{Ax},\ \mathbf{y}' = \mathbf{Ax}'$ を満たす $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbf{X}$ が存在するはずだから、$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}') = \alpha\mathbf{Ax} + \beta\mathbf{Ax}' = \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{y}'$。ゆえに $\alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{y}' \in R(\mathbf{A})$。■

例１　各 $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right] \in \mathbf{R}^{m\times n}$ に対応して次式で定義される変換

(1)　$\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$　（$\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n\times1},\ \mathbf{y} \in \mathbf{R}^{m\times1}$）すなわち、$\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11} \cdots & a_{1n}\\ \vdots \ \ \ddots & \vdots\\ a_{m1} \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$

は $\mathbf{R}^{n\times1}$ から $\mathbf{R}^{m\times1}$ への線形変換をあらわす。この場合零空間 $N(\mathbf{A})$ とは同次方程式 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ の解

全体のこと、値域 $R(\mathbf{A})$ とは、$\mathbf{x}$ が $\mathbf{R}^{n\times 1}$ 上全体を動いたときの像 $\mathbf{Ax}$ 全体のことを意味する。この場合 $R(\mathbf{A})$ を $\mathbf{A}$ の<u>列空間</u> column space と呼ぶこともある。同様に $\mathbf{yA}$ $(\mathbf{y}\in\mathbf{R}^{1\times m})$ 型行列全体を $\mathbf{A}$ の<u>行空間</u> row space と呼ぶ。列空間は $\mathbf{R}^{m\times 1}$ の部分空間、行空間は $\mathbf{R}^{1\times n}$ の部分空間を表す。また、行列方程式 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ （$\mathbf{b}$ は $\mathbf{R}^{m\times 1}$ 内の与えられたベクトル）の解に関する 2.8 節の結果「解集合＝特解＋（$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ の任意解)」は「解集合＝特解＋$N(\mathbf{A})$」と簡潔に表現できる。

2.15 基底

いま $\mathbf{M}\neq\{\mathbf{0}\}$ を与えられたベクトル空間 $\mathbf{V}$ の一つの部分空間とする。このとき $\mathbf{M}$ 内の有限個のベクトルの集合 $\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_k\}$ （あるいは単に $\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_k$）が $\mathbf{M}$ の<u>基底</u> basis であるとは、それらが一次独立かつ $\mathbf{M}$ を張る（$span\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_k\}=\mathbf{M}$）ことをいう。より一般的には、$\mathbf{M}$ の部分集合 $\mathbf{S}$ が $\mathbf{M}$ の基底であるとは、$\mathbf{S}$ が次独立かつ $\mathbf{M}$ を張ることをいう。基底を構成する個々のベクトルを<u>基底ベクトル</u> basis vector という。基底は線形代数の「背骨」ともいうべき重要な概念である。

基底の重要性は次の展開定理に尽きる：

「$\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_k\}$ を部分空間 $\mathbf{M}$ の基底とすれば、$\mathbf{M}$ 内の各ベクトルは $\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_k$ の一次結合として一意的に表現できる」

証明　一意性のみを示せば十分である。実際、$c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_k\mathbf{v}_k=d_1\mathbf{v}_1+\cdots+d_k\mathbf{v}_k$ なら、$(c_1-d_1)\mathbf{v}_1+\cdots+(c_k-d_k)\mathbf{v}_k=\mathbf{0}$。$\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_k\}$ の一次独立性より $c_1-d_1=\cdots=c_k-d_k=0$。■

例 1　$\mathbf{V}=\mathbf{R}^{2\times 1}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 型実ベクトル全体の集合、$\mathbf{F}=\mathbf{R}=$ 実数体とする。$\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\}$、$\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\}$ はいずれも $\mathbf{V}$ の基底である。■

例 2　n 次実可逆行列の列全体は $\mathbf{R}^{n\times 1}$ の基底を表し、行全体は $\mathbf{R}^{1\times n}$ の基底を表す。

実際、$\mathbf{A}=\left[\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n\right]\in\mathbf{R}^{n\times n}$（$\mathbf{a}_j$ は第 j 列を表す）を可逆行列とすれば、$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ の解 $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^{n\times 1}$ は $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ のみである。すなわち、$\mathbf{a}_1x_1+\cdots+\mathbf{a}_nx_n=\mathbf{0}$ の解は $x_1=\cdots=x_n=0$ のみである。ゆえに、$\{\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n\}$ は一次独立である。また、任意の $\mathbf{b}\in\mathbf{R}^{n\times 1}$ に対して、$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ は一意の解

$\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\in\mathbf{R}^{n\times 1}$ をもつ。すなわち、$\mathbf{a}_1x_1+\cdots+\mathbf{a}_nx_n=\mathbf{b}$ を満たす $x_1,\cdots,x_n$ の組が存在する。

ゆえに、$\{\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n\}$ は $\mathbf{R}^{n\times 1}$ を張る。行全体が $\mathbf{R}^{1\times n}$ の基底をなすことも同様に証明できる。■

例 3　$\mathbf{V}$ 内の任意の一次独立なベクトル $\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_k$ は、$span\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_k\}$ の基底を表す。一般に、$\mathbf{V}$ 内の任意の一次独立な部分集合 $\mathbf{S}$ をとると、それは $span\ \mathbf{S}$ の基底になっている。■

例4　区間 $0<x<1$ 上で定義された実係数多項式 $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$

（$a_0(\neq 0), a_1, \cdots, a_n$ は実数、n は 0 または自然数）全体 $\mathbf{P}$ は通常の和とスカラー倍（実数倍）に関して実ベクトル空間を作る。いま、集合 $\{1, x, x^2, \cdots\}$ を $\mathbf{S}$ と呼ぶと、その任意の有限部分集合（例：$\{1, x^2, x^4, x^6\}$）は一次独立ゆえ、$\mathbf{S}$ は一次独立である。そして $\{1, x, x^2, \cdots\}$ は明らかに $\mathbf{P}$ を張る。ゆえに $\{1, x, x^2, \cdots\}$ は $\mathbf{P}$ の一つの基底を表す。■

2.16 次元

与えられたベクトル空間 $\mathbf{V}$ の次元 dimension が n（0 または自然数）であるとは、$\mathbf{V}$ 中に n 個の一次独立なベクトルが少なくとも一組存在し、$n+1$ 個以上のベクトルは必ず一次従属であることをいう。記号では $\dim \mathbf{V} = n$ と表記する。そのような値 n が存在しなければ $\mathbf{V}$ は無限次元 infinite-dimensional であるという。この定義から次元は一意的に決まることは明らかである。とくに、$\mathbf{0}$ ベクトルだけからなるベクトル空間の次元は 0 と定める。すなわち、$\dim\{\mathbf{0}\} = 0$。線形代数における研究主題は有限次元ベクトル空間間の線形変換である。

例　$\dim \mathbf{R}^{n\times 1} = n$、$\dim \mathbf{C}^{n\times 1} = n$ （$n = 1, 2, \cdots$）

証明　$\mathbf{e}_j$ を n 次単位行列の第 j 列とすれば、$\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ は明らかに $\mathbf{R}^{n\times 1}$ 内の一次独立な集合を表す。また、任意の $\mathbf{x} = \left[x_1 \cdots x_n\right]^T \in \mathbf{R}^{n\times 1}$ は n 個のベクトル $\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ の一次結合形 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ として書けることも明らかである。ゆえに、2.11 節「線形代数の基本定理」により、$\mathbf{R}^{n\times 1}$ 内の $n+1$ 個のベクトルはかならず一次従属である。$\mathbf{C}^{n\times 1}$ についても全く同じ論法を使えばよい。■

2.17 基底に関する定理

本節では有限次元ベクトル空間に関する常用の事実を証明する。すなわち、$\mathbf{V}$ を体 $\mathbf{F}$ 上の n 次元ベクトル空間とすれば、次の事実(I)-(VI)が成り立つ（$n = 1, 2, \cdots$）：

(I)　存在定理「$\mathbf{V}$ は n 個のベクトルから構成される基底を少なくとも一つもつ」

(II)　基底ベクトル数の不変性「$\mathbf{V}$ の基底はかならず n 個のベクトルからなる」

(III)　逆「n 個のベクトルからなる、一次独立な部分集合は $\mathbf{V}$ の基底を表す。」

(IV)　逆「n 個のベクトルからなる、$\mathbf{V}$ を張る部分集合は $\mathbf{V}$ の基底を表す。」

(V)　(III),(IV)の行列表現「与えられた $\mathbf{F}$ 上の n 次正方行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ に対して $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ が真なら、$\mathbf{BA} = \mathbf{I}$ も真である（すなわち、$\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ なら $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ は互いに逆行列の関係にある）。」

(VI)　拡張定理「$\mathbf{V}$ 内の任意の一次独立な集合 $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k\}$（ただし $0 < k < n$）に $n-k$ 個のベクトルを適当に追加すれば $\mathbf{V}$ の基底となる」

証明　以下では、2.10 節において証明した補題「$\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k\}$ が一次独立、$\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k, \mathbf{x}\}$ が一次従属なら、$\mathbf{x}$ は $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k$ の一意的一次結合として書ける」をよく使う。

(I)の証明　$\dim \mathbf{V} = n$ ゆえ、$\mathbf{V}$ 内に n 個の一次独立なベクトル $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ が存在し、$\mathbf{V}$ の任意のベクトル $\mathbf{x}$ に対して、$\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n, \mathbf{x}\}$ は一次従属となる。すると補題により、$\mathbf{x}$ は $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$

の一意的一次結合として表せる。ゆえに、$\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n\}$はVを張る。これは$\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n\}$がVの一つの基底であることを示す。■

(II)の証明　(I)で示したVの基底$\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n\}$を一つとる。そして$\{\mathbf{w}_1,\cdots,\mathbf{w}_p\}$を別のVの基底としよう。$p=n$を示す。実際$p>n$とすれば、各$\mathbf{w}_j$（$j=1,\cdots,p$）は$\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n$の一次結合として表せるはずだから、線形代数の基本定理により、$\{\mathbf{w}_1,\cdots,\mathbf{w}_p\}$は一次従属となるはずである。$\{\mathbf{w}_1,\cdots,\mathbf{w}_p\}$はVの基底であるからこれは矛盾である。ゆえに$p\le n$。二つの基底の役割を交換し今の論法を適用すれば$n\le p$が得られる。■

(III)の証明　$\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n\}$を一次独立とする。$\dim\mathbf{V}=n$ゆえ、任意の$\mathbf{x}\in\mathbf{V}$に対して集合$\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n,\mathbf{x}\}$は一次従属となる。補題により$\mathbf{x}$は$\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_k$の一意的一次結合として書ける。ゆえに$\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n\}$はVを張る。ゆえに$\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n\}$はVの基底を表す。■

(IV)の証明　$span\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n\}=\mathbf{V}$とする。仮に$\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n\}$が一次従属であったとすれば、$\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n$の少なくとも 1 個が他の$\mathbf{v}_i$の一次結合として書けるはずである。すると高々$n-1$のベクトルのスパンがVに等しいことになり、V内の$n$個のベクトルはかならず一次従属となる。これは$\dim\mathbf{V}=n$に矛盾する。■

(V)の証明　$\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbf{R}^{n\times n}$とする。方程式$\mathbf{Bx}=\mathbf{0}$を考える。左から$\mathbf{A}$を乗じると$\mathbf{ABx}=\mathbf{x}=\mathbf{0}$（$\because\ \mathbf{AB}=\mathbf{I}$）。これは$\mathbf{B}$の列全体が一次独立であることを示す。前節の例で示したように、$\dim\mathbf{R}^{n\times1}(=\dim\mathbf{C}^{n\times1})=n$であるから、(III)により、$\mathbf{B}$の列全体は$\mathbf{R}^{n\times1}$の基底を表す。ゆえに単位行列の各列は$\mathbf{B}$の列の一次結合として書けるはずである。すなわち、$\mathbf{BX}=\mathbf{I}$を満たす$\mathbf{X}\in\mathbf{R}^{n\times n}$が存在する。すると$\mathbf{X}=\mathbf{IX}=(\mathbf{AB})\mathbf{X}=\mathbf{A}(\mathbf{BX})=\mathbf{AI}=\mathbf{A}$。$\mathbf{BX}=\mathbf{I}$ゆえ、これは$\mathbf{BA}=\mathbf{I}$を示す。$\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbf{C}^{n\times n}$の場合も証明法は同様である。■

(VI)の証明　$0<k<n$ゆえ、(II)により$\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_k\}$はVの基底ではあり得ない。すなわち、$span\ \{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_k\}\ne\mathbf{V}$。そこで$\mathbf{v}_{k+1}\notin span\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_k\}$をVから任意に一つとる。すると、$\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_{k+1}\}$は一次独立である（$\because$ これを否定すれば補題により$\mathbf{v}_{k+1}\in span\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_k\}$となってしまう）。$k+1=n$なら(III)により$\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_{k+1}\}$はVの基底である。$k+1<n$なら、$k+1$を$k$と見て、今の手続きを繰り返す。これにより、$n-k$個のベクトル$\mathbf{v}_{k+1},\cdots,\mathbf{v}_n$を適当に取れば$\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_k\}\cup\{\mathbf{v}_{k+1},\cdots,\mathbf{v}_n\}$がVの基底となることは明らかである。■

2.18　　線形変換の行列表現

線形代数の主題は線形変換の研究であることはすでにのべた。その研究法の有力な手段が線形変換の行列表現である。これについて説明しよう。いま、実n次元ベクトル空間Xから実m次元ベクトル空間Yへの線形変換Aについて考える。X, Yからそれぞれの基底$\{\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n\}$、$\{\mathbf{y}_1,\cdots,\mathbf{y}_m\}$を一組とる。簡単のためこれ以降$\{\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n\}$、$\{\mathbf{y}_1,\cdots,\mathbf{y}_m\}$をそれぞれ単に$\{\mathbf{x}_i\}$、

$\{\mathbf{y}_i\}$と略記することにする。任意の$\mathbf{x}\in\mathbf{X}$はかならず基底ベクトルの一意的一次結合

(1)　$\mathbf{x}=x_1\mathbf{x}_1+\cdots+x_n\mathbf{x}_n=[\mathbf{x}_1\cdots\mathbf{x}_n]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$　(右辺は形式的な積の意味)

に展開できる。ここに展開係数の組$(x_1,\cdots,x_n)$を基底$\{\mathbf{x}_i\}$に関する$\mathbf{x}$の座標 coordinate、基底自体を座標系 coordinate system という。とくに、$\mathbf{x}_1$の座標は$(1,0,\cdots,0)$、・・、$\mathbf{x}_n$の座標は$(0,\cdots,0,1)$である。

例　$\mathbf{V}=\mathbf{R}^{2\times1}$とし、二つの基底$\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\}$、$\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\}$をとる。すると任意の$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{2\times1}$に対して、$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=x\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\frac{x+y}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\frac{y-x}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$であるから、座標系$\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\}$に関する$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$の座標は$(x,y)$、座標系$\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\}$に関する$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$の座標は$(\frac{x+y}{2},\frac{y-x}{2})$である。■

　さて、線形性により

(2)　$\mathbf{Ax}=x_1\mathbf{Ax}_1+\cdots+x_n\mathbf{Ax}_n\equiv\mathbf{y}=[\mathbf{y}_1\cdots\mathbf{y}_m]\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix}$

と一意的に書ける。各$\mathbf{Ax}_j\in\mathbf{Y}$は基底$\{\mathbf{y}_i\}$により一意的一次結合

(3)　$\mathbf{Ax}_j=a_{1j}\mathbf{y}_1++a_{mj}\mathbf{y}_m=[\mathbf{y}_1\cdots\mathbf{y}_m]\begin{bmatrix}a_{1j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{bmatrix}$　(これも形式的な積)

の形に書ける（$j=1,\cdots,n$）。まとめると

(4)　$\mathbf{y}=\mathbf{Ax}=\mathbf{A}([\mathbf{x}_1\cdots\mathbf{x}_n]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix})=[\mathbf{y}_1\cdots\mathbf{y}_m](\begin{bmatrix}a_{11}\cdots a_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}\cdots a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix})=[\mathbf{y}_1\cdots\mathbf{y}_m]\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix}$

（これも形式的な積）と書いてよいことがわかる（検算されよ）。これより

(5)　$\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}\cdots a_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}\cdots a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$　(これは通常の行列積)

が得られる。これを線形変換 $\mathbf{A}$ の与えられた基底に関する行列表現 matrix representation という。ここに右辺 $n\times n$ 行列の第 j 列は基底 $\{\mathbf{y}_i\}$ に関する $\mathbf{Ax}_j$ の座標を表すことに注意する。

行列表現は基底の選び方により異なるのは当然である。いま、$\{\mathbf{x}_i\},\{\mathbf{x}_i'\}$ 　を $\mathbf{X}$ の基底、$\{\mathbf{y}_i\},\{\mathbf{y}_i'\}$ を $\mathbf{Y}$ の基底とする（簡単のため $\{\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n\}$、・・を単にこう書く）。基底の性質より二つの基底 $\{\mathbf{x}_i\},\{\mathbf{x}_i'\}$ の間には

(6) $$\left[\mathbf{x}_1\cdots\mathbf{x}_n\right]=\left[\mathbf{x}_1'\cdots\mathbf{x}_n'\right]\begin{bmatrix}p_{11}\cdots p_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\\ p_{n1}\cdots p_{nn}\end{bmatrix}\equiv\left[\mathbf{x}_1'\cdots\mathbf{x}_n'\right]\mathbf{P}$$

(7) $$\left[\mathbf{y}_1\cdots\mathbf{y}_m\right]=\left[\mathbf{y}_1'\cdots\mathbf{y}_m'\right]\begin{bmatrix}q_{11}\cdots q_{1m}\\ \cdots\cdots\cdots\\ q_{m1}\cdots q_{mm}\end{bmatrix}\equiv\left[\mathbf{y}_1'\cdots\mathbf{y}_m'\right]\mathbf{Q}$$

型の関係が存在する。ここに $\mathbf{P},\mathbf{Q}$ はそれぞれ n 次、m 次の可逆行列を表す。実際、二つの基底 $\{\mathbf{x}_i\},\{\mathbf{x}_i'\}$ の役割を交換すれば、$\left[\mathbf{x}_1'\cdots\mathbf{x}_n'\right]=\left[\mathbf{x}_1\cdots\mathbf{x}_n\right]\mathbf{P}_1$ 型の関係が成立するから、これを上の関係に使うと $\left[\mathbf{x}_1\cdots\mathbf{x}_n\right]=\left[\mathbf{x}_1\cdots\mathbf{x}_n\right](\mathbf{P}_1\mathbf{P})$。基底による展開の一意性により $\mathbf{P}_1\mathbf{P}=\mathbf{I}$。これは $\mathbf{P}_1,\mathbf{P}$ が互いの逆行列であることを示す（前項(V)参照）。(6)(7)より

(8) $$\left[\mathbf{x}_1\cdots\mathbf{x}_n\right]\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\left[\mathbf{x}_1'\cdots\mathbf{x}_n'\right]\mathbf{P}\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\equiv\left[\mathbf{x}_1'\cdots\mathbf{x}_n'\right]\begin{bmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{bmatrix}、$$

(9) $$\left[\mathbf{y}_1\cdots\mathbf{y}_n\right]\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix}=\left[\mathbf{y}_1'\cdots\mathbf{y}_m'\right]\mathbf{Q}\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix}\equiv\left[\mathbf{y}_1'\cdots\mathbf{y}_m'\right]\begin{bmatrix}y_1'\\ \vdots\\ y_m'\end{bmatrix}$$

すなわち、

(10) $$\mathbf{P}\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{bmatrix}、\mathbf{Q}\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1'\\ \vdots\\ y_m'\end{bmatrix}$$

これらはベクトル空間 $\mathbf{X}$ 内における座標変換 coordinate transformation の式を表す。(10)を(5)に使うと

$$(11)\quad \begin{bmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_m' \end{bmatrix} = (\mathbf{Q}\begin{bmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\cdots a_{mn} \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1})\begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$$

が得られる。右辺第 1 項が$\{\mathbf{x}_i'\},\{\mathbf{y}_i'\}$座標系に関する線形変換$\mathbf{A}$の行列表現を表す。それは$\{\mathbf{x}_i\},\{\mathbf{y}_i\}$座標系に関する行列表現$\begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$の左右からそれぞれ$\mathbf{Q},\mathbf{P}^{-1}$を乗じたものに等しい。

2.19　座標変換と分解定理

前節の結果は線形代数における行列算の位置づけを示している。すなわち、与えられた線形変換の研究は$\mathbf{y}=\mathbf{Ax}$型（$\mathbf{x}:n\times1,\ \mathbf{y}:m\times1,\ \mathbf{A}:m\times n$）の線形変換を通じて行えることを示す。実際には、これに適当な座標変換$\mathbf{x}=\mathbf{Px}',\ \mathbf{y}=\mathbf{Qy}'$（$\mathbf{P},\mathbf{Q}$はそれぞれ$n$次、$m$次の可逆行列）を施して得られる式$\mathbf{y}'=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{APx}'\equiv\mathbf{Bx}'$において、新座標から見た元の線形変換の姿$\mathbf{B}=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AP}$にできるだけ簡単な形をとらせるように考える。結果は各種分解定理として知られている。

例えば、$\mathbf{P},\mathbf{Q}$を適当な可逆行列に選べば$\mathbf{B}=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AP}$は$=\begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$となる（同値分解）。$\mathbf{A}\neq\mathbf{0}$なら$r\geq1$であり、$r$は$\mathbf{A}$のみによって一意的に確定する、階数 rank と呼ばれる重要量を表す。分解定理の概要は次のレッスンで示す。各分解定理の証明と応用例はレッスン 4 以降、順次示す。

2.20 集合論から Part II

「同値関係」と「同値類」について説明する。一般に、集合Sの任意元の順序対(a,b)に対して真か偽か判定可能な数学的陳述（命題 proposition という）“$a\sim b$”が定義されているとき、S上で関係 relation “$\sim$”が定義されたという。以下命題“$a\sim b$”が真であることを単に$a\sim b$と書く。とくに「回帰性$a\sim a$」「対称性$a\sim b$なら$b\sim a$」「推移性$a\sim b$、$b\sim c$なら$a\sim c$」が満たされる場合、関係“$\sim$”を同値関係 equivalence relation という。例えば、与えられた集合上で定義された相等関係“＝”は同値関係のもっとも普通のものである。その他の例を挙げると：

例 1 与えられたベクトル空間$\mathbf{V}$から一つの部分空間$\mathbf{M}$をとる。いま$\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbf{V}$に対して「$\mathbf{a}\sim\mathbf{b}$とは$\mathbf{a}-\mathbf{b}\in\mathbf{M}$」と定義すれば“$\sim$”は$\mathbf{V}$上で定義された一つの同値関係を表す。実際、部分空間は$\mathbf{0}$を含み和およびスカラー倍に関して閉じているから「回帰性$\mathbf{a}\sim\mathbf{a}$」「対称性$\mathbf{a}\sim\mathbf{b}$なら$\mathbf{b}\sim\mathbf{a}$」（$\because\ \mathbf{a}-\mathbf{b}\in\mathbf{M}$なら$\mathbf{b}-\mathbf{a}=(-1)(\mathbf{a}-\mathbf{b})\in\mathbf{M}$）「推移性$\mathbf{a}\sim\mathbf{b}$、$\mathbf{b}\sim\mathbf{c}$なら$\mathbf{a}\sim\mathbf{c}$」（$\because\ \mathbf{a}-\mathbf{b},\mathbf{b}-\mathbf{c}\in\mathbf{M}$なら$\mathbf{a}-\mathbf{c}=(\mathbf{a}-\mathbf{b})+(\mathbf{b}-\mathbf{c})\in\mathbf{M}$）が満足される。■

例 2　$m\times n$実行列全体$\mathbf{R}^{m\times n}$上に定義された関係「$\mathbf{A}\sim\mathbf{B}$とは適当な可逆行列$\mathbf{P},\mathbf{Q}$をとれば$\mathbf{A}=\mathbf{PBQ}$となる」は同値関係を表す。実際、$\mathbf{A}=\mathbf{IAI}$だから回帰性は満たされる。つぎに$\mathbf{A}\sim\mathbf{B}$なら$\mathbf{A}=\mathbf{PBQ}$を解いて$\mathbf{B}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AQ}^{-1}$だから、対称性も満たされる。最後に

$\mathbf{A}\sim\mathbf{B}, \mathbf{B}\sim\mathbf{C}$ なら $\mathbf{A}=\mathbf{PBQ}$ 、$\mathbf{B}=\mathbf{UCV}$（$\mathbf{P},\mathbf{Q},\mathbf{U},\mathbf{V}$ は可逆行列）ゆえ、$\mathbf{A}=(\mathbf{PU})\mathbf{C}(\mathbf{VQ})$ 。$\mathbf{PU},\mathbf{VQ}$ はいずれも可逆行列の積だから可逆行列である。ゆえに推移性も満たされる。■

集合 S 上で同値関係"～"が定義されているものとする。このとき、S の任意元 a に対して、$x\sim a$ を満たす元 x を「a に同値な元」といい、そのような元全体の集合を $[a]$ と書き、a によって生成された同値類 equivalence class という。同値類の重要性な性質を示す：

(1) 任意元 a に対して $a\in[a]$ （回帰性による。ゆえに、$[a]$ は空集合ではない。）

(2) 同値類全体の合併集合は親集合 S に等しい：$\bigcup_{a\in S}[a]=S$ （(1)より明らか。）

(3) $[a]=[b]$ か $[a]\cap[b]=\varnothing$（空集合）のいずれかが成り立つ。すなわち、$[a],[b]$ は完全に一致するか共通部分がまったくない別集合かのいずれかである。

実際、 $[a]\cap[b]\neq\varnothing$ なら $x\in[a]\cap[b]$ を一つとる。すると $y\in[a]$ なら、$y\sim x,\ x\sim b$ だから推移性により $y\sim b$ 。ゆえに $[a]\subseteq[b]$。対称性より $[b]\subseteq[a]$。ゆえに $[a]=[b]$。

(4) $[a]=[b]\Leftrightarrow a\sim b$　すなわち、互いに同値な元によって生成される同値類は同一である。

実際、$a\sim b$ なら任意の $y\in[a]$ に対して $y\sim a\sim b$ だから推移性より $y\sim b$ 、すなわち $y\in[b]$。ゆえに $[a]\subseteq[b]$。対称性より $[b]\subseteq[a]$。ゆえに $[a]=[b]$。逆は回帰性より明らか。

(2)と(3)から、「S は互いに共通部分のない同値類に分割できる」ことがわかる。

例 3（＝例 1 のつづき）商空間　$\mathbf{a}\in\mathbf{V}$ によって生成された同値類 $[\mathbf{a}]$ とは $\mathbf{x}-\mathbf{a}\in\mathbf{M}$ を満たすすべての $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$ の集合によって与えられる。すなわち、$[\mathbf{a}]=\mathbf{a}+\mathbf{m}(\mathbf{m}\in\mathbf{M})$ 型ベクトル全体 $\equiv\mathbf{a}+\mathbf{M}$ となる。とくに $[\mathbf{0}]=\mathbf{M}$ 。この同値類の一つ一つを $\mathbf{M}$ による剰余類 coset という。$\mathbf{M}$ による剰余類全体の集合を $\mathbf{V}/\mathbf{M}$ によって表す。これに和とスカラー倍を次のように定義すればベクトル空間となる：

和：$[\mathbf{a}]+[\mathbf{b}]=[\mathbf{a}+\mathbf{b}]$ （すなわち、$(\mathbf{a}+\mathbf{M})+(\mathbf{b}+\mathbf{M})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{M}$ ）

スカラー倍：$\alpha[\mathbf{a}]=[\alpha\mathbf{a}]$ （すなわち、$\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{M})=(\alpha\mathbf{a})+\mathbf{M}$ ）

このベクトル空間を商空間 quotient space という。ここで、以上の定義に曖昧性がないことを確かめておく必要がある。まず $[\mathbf{a}]=[\mathbf{c}],\ [\mathbf{b}]=[\mathbf{d}]$ なら $[\mathbf{a}+\mathbf{b}]=[\mathbf{c}+\mathbf{d}]$ であることを示す。実際 $[\mathbf{a}]=[\mathbf{c}],\ [\mathbf{b}]=[\mathbf{d}]$ は $\mathbf{a}-\mathbf{c},\mathbf{b}-\mathbf{d}\in\mathbf{M}$ を意味する。すると

$(\mathbf{a}+\mathbf{b})-(\mathbf{c}+\mathbf{d})=(\mathbf{a}-\mathbf{c})+(\mathbf{b}-\mathbf{d})\in\mathbf{M}$ （部分空間は和に関して閉じているため）。これは $\mathbf{a}+\mathbf{b}\sim\mathbf{c}+\mathbf{d}$ を意味する。ゆえに $[\mathbf{a}+\mathbf{b}]=[\mathbf{c}+\mathbf{d}]$。つぎに $[\mathbf{a}]=[\mathbf{b}]$ なら $[\alpha\mathbf{a}]=[\alpha\mathbf{b}]$ を示す。実際、$[\mathbf{a}]=[\mathbf{b}]$ なら $\mathbf{a}-\mathbf{b}\in\mathbf{M}$ だから $\alpha(\mathbf{a}-\mathbf{b})\in\mathbf{M}$ （部分空間はスカラー倍に関して閉じているため）、すなわち $\alpha\mathbf{a}-\alpha\mathbf{b}\in\mathbf{M}$。これは $\alpha\mathbf{a}\sim\alpha\mathbf{b}$ を意味する。ゆえに $[\alpha\mathbf{a}]=[\alpha\mathbf{b}]$。

例をあげよう。$\mathbf{V}=\mathbf{R}^{2\times1}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 型実行列全体、$\mathbf{M}=t\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 型実行列全体をとり、平面上に直交座標系（$xy-$座標系）を設け、行列 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ を平面上の点の座標とみなすと、$\mathbf{M}$ は原点を通る直線 $L: y=x$ を表す。代表的な同値類 $[\mathbf{a}]=\mathbf{a}+\mathbf{M}\ (\mathbf{a}\in\mathbf{V})$ は直線 L を $\mathbf{a}$ だけ平行移動した直線を表す。商空間 $\mathbf{V}/\mathbf{M}$ はこれら原点を通り直線 $L: y=x$ に平行な直線全体を表す。和

$(\mathbf{a}+\mathbf{M})+(\mathbf{b}+\mathbf{M})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{M}$ は直線 L を $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ だけ平行移動したもの、スカラー倍 $\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{M})=(\alpha\mathbf{a})+\mathbf{M}$ は直線 L を $\alpha\mathbf{a}$ だけ移動したものを表す。■

例 4（＝例 2 のつづき）　結果のみをのべると、同値類は階数 rank 別の分類と同一となる。すなわち、同値類は：階数 0 の行列（$\mathbf{0}$ 行列のみ)、階数1の行列全体、・・、階数 $\min\{m,n\}$ の行列全体である。これ以外の同値類はない。証明はレッスン 5 で行う。

最後にひとこと　ここまでのレッスンは、いわば、線形代数を語る言葉の創造である。とくに 2.11 節において交換法によって「線形代数の基本定理」の応用は広い。実際、これを基に 2.17 節「基底に関する定理」を証明した。ただ、似たような事実がいくつも出てきて記憶が曖昧になりやすい。だが、これらはすべて、簡単で覚えやすい同値分解から再生可能なので（レッスン 5 で示す)、たとえ忘れても心配無用である。次のレッスンで分解定理を中心に線形代数の概要をのべ、レッスン 4 以降で線形代数の基礎的知識を順次語っていく。

腕試し問題

問題 2.1　$X=Y=\mathbf{R}$ とし、X より Y への変換 $y=x^2-1$ について考える。変域、像空間、値域は何か。単射性、全射性についてはどうか。集合 $\{y:-1\le y\le 16\}$ の逆像は何か。

（略解　変域は実数全体 $\mathbf{R}$、像空間も $\mathbf{R}$、値域は $\{y:y\ge -1\}$ である。$(-1)^2=1^2=1$ ゆえ、単射ではない。また値域 $\ne\mathbf{R}$ ゆえ、全射ではない。集合 $\{y:-1\le y\le 16\}$ の逆像は $\{x:-4\le x\le 4\}$ である。■)

問題 2.2　実ベクトル空間 $\mathbf{R}^{2\times 1}$ 内のベクトルの集合(1)-(4)の一次独立性／一次従属性を判定せよ：(1) $\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right\}$ (2) $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right\}$ (3) $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ (4) $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}$

（略解　与えられたベクトルの集合 $\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_k\}$ に対して、$c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_k\mathbf{v}_k=\mathbf{0}$ が $c_1=\cdots=c_k=0$ 以外に解をもつかどうかを見ればよい。(1)一次独立　(2)一次独立　(3)一次従属　(4)一次従属　■)

問題 2.3　$\mathbf{V}$ を与えられた体 $\mathbf{F}$ 上のベクトル空間（$\mathbf{F}=\mathbf{R}$ または $\mathbf{C}$ と思ってよい)、$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbf{V}$ を一次独立なベクトルとする。このとき、$\mathbf{p}=\mathbf{a}+\mathbf{b},\ \mathbf{q}=\mathbf{a}-\mathbf{b},\ \mathbf{r}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ とすれば、$\{\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r}\}$ も一次独立であることを示せ。

（略証　$\mathbf{0}=c_1\mathbf{p}+c_2\mathbf{q}+c_3\mathbf{r}$ を形式的な積を用いて書いた式

$$\mathbf{0}=[\mathbf{p}\ \mathbf{q}\ \mathbf{r}]\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\left([\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=[\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}]\left(\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}\right)$$

について考えると見通しがよい。$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ の一次独立性から、上式は

$$\mathbf{0}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{bmatrix}$$ と同値となる。この解が $c_1=c_2=c_3=0$ に限ることを示せばよい。■)

問題 2.4　$\mathbf{R}^{3\times 1}$ の部分空間 $\mathbf{S}=\{s\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}: s\in\mathbf{R}\},\ \mathbf{T}=\{t\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}: t\in\mathbf{R}\}$ に対して $\mathbf{S}+\mathbf{T}$ を求めよ。

（略解　$\mathbf{S}+\mathbf{T}=\{\mathbf{s}+\mathbf{t}:\mathbf{s}\in\mathbf{S},\mathbf{t}\in\mathbf{T}\}=\{\begin{bmatrix}x\\y\\0\end{bmatrix}: x,y\in\mathbf{R}\}$　■）

問題 2.5 いま $\mathbf{S},\mathbf{T}$ をベクトル空間 $\mathbf{V}$ の部分空間とすれば和 $\mathbf{S}+\mathbf{T}\equiv\mathbf{U}$ も部分空間である（2.11 節例 3)。さらに $\mathbf{S}\cap\mathbf{T}=\{\mathbf{0}\}$ なら $\mathbf{U}$ 内の任意ベクトル $\mathbf{u}$ は一意的に $\mathbf{u}=\mathbf{s}+\mathbf{t},\mathbf{s}\in\mathbf{S},\mathbf{t}\in\mathbf{T}$ の形に表現されることを示せ。すなわち、$\mathbf{s}_1+\mathbf{t}_1=\mathbf{s}_2+\mathbf{t}_2\ (\mathbf{s}_1,\mathbf{s}_2\in\mathbf{S},\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2\in\mathbf{T})$ なら $\mathbf{s}_1=\mathbf{s}_2,\mathbf{t}_1=\mathbf{t}_2$ であることを示せ。この場合、$\mathbf{S}+\mathbf{T}$ をとくに $\mathbf{S}\oplus\mathbf{T}$ と書き、$\mathbf{S},\mathbf{T}$ の直和 direct sum という。

（略証　$\mathbf{s}_1+\mathbf{t}_1=\mathbf{s}_2+\mathbf{t}_2\ (\mathbf{s}_1,\mathbf{s}_2\in\mathbf{S},\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2\in\mathbf{T})$ なら、$\mathbf{s}_1-\mathbf{s}_2=\mathbf{t}_2-\mathbf{t}_1\in\mathbf{S}\cap\mathbf{T}=\{\mathbf{0}\}$ ■）

問題 2.6　S を整数全体の集合とし、任意の整数 a,b に対して「$a\sim b$ とは差 $a-b$ が 2 で割り切れること」と定義すれば、関係“～”は同値関係を表すことを示し、同値類を特定せよ。また「$a\sim b$ とは $a+b=0$ なること」と定義すれば、この関係は同値関係ではないことを示せ。

（略証　前者に対しては「回帰性 $a\sim a$」「対称性 $a\sim b$ なら $b\sim a$」「推移性 $a\sim b$、$b\sim c$ なら $a\sim c$」（$\because\ a-c=(a-b)+(b-c)$）が満たされる。同値類は奇数全体と偶数全体の二つある。後者に対しては $1\sim 1$ は偽であるから回帰性が満たされない。■）