レッスン 5　同値分解と LDU 分解 Part II 応用

このレッスンでは同値分解と LDU 分解から、線形代数においてバックグラウンド的に使われる基本的事実を数多く導く。このうち、「線形代数の基本定理」ほか少数の事実は、レッスン 2 において「ベクトル空間の言葉」（スパン、一次独立性、基底、次元、・・）を使って導出済みである。「ベクトル空間の言葉」「変換の言葉」（全射、単射、値域、零空間、・・）は特定の行列表現に依存しないという特徴がある。ただし、各種計算問題をはじめ、行列算を借りないと接近できない話題も多い。そして、「行列の階数は値域の次元に等しい：$rank(\mathbf{A}) = \dim R(\mathbf{A})$」（以下 5.6 節）が例示するように、この 3 種の言葉は相補的である。

本論に入る前にスカラーについて一言する。実 $m \times n$ 行列全体の集合 $\mathbf{R}^{m\times n}$ に対応するスカラーはふつう実数だが、複素行列に対応するスカラーはふつう複素数である。さいわい、一次独立な実行列の集合（スカラーは実数）はスカラーを複素数に拡大してもやはり一次独立である。このコンテンツにおいても実／複素どちらの場合でも成り立つ事実は、議論の特定性（と実用性）のため、実の場合に限ることもある。

5.1　過少決定系は非零解をもつ（線形代数の基本定理）

(1) 線形代数の基本定理「$\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m\times n}$（または $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{m\times n}$）を与えられた行列とし、$m < n$ とすれば、$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ は少なくともひとつの解 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$（$\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n\times 1}$ または $\mathbf{x} \in \mathbf{C}^{n\times 1}$）をもつ。すなわち、方程式数が未知数の数より厳密に小さい連立一次方程式（過少決定系 under-determined system という）は必ず非零解をもつ。」

同値なのべ方は

(2)「実または複素ベクトル空間 $\mathbf{V}$ 内の与えられた k 個のベクトル $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k$ の $k+1$ 個の一次結合 $\mathbf{c}_1 \equiv b_{11}\mathbf{a}_1 + \cdots + b_{k1}\mathbf{a}_k, \cdots, \mathbf{c}_{k+1} \equiv b_{1,k+1}\mathbf{a}_1 + \cdots + b_{k,k+1}\mathbf{a}_k$ はかならず一次従属である。すなわち、$x_1\mathbf{c}_1 + \cdots x_{k+1}\mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{0}$ を満たす、すべてはゼロではないスカラーの組 $x_1, \cdots, x_{k+1}$ が少なくとも一組存在する。」

証明　二つの証明法がある。一つはレッスン 2 におけるように「交換法」によって(2)を先に証明し、$\mathbf{V}$ として $\mathbf{R}^{n\times 1}$（または $\mathbf{C}^{n\times 1}$）をとり(1)を導く方法である。これは済ませたものとする。第 2 の方法はここで示すように同値分解によって(1)を示し、レッスン 2（2.11 節）で示した計算から(2)を出す方法である。以下はこれを示す。

$\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ の場合だけ考えておけばよい。$\mathbf{A}$ を同値分解を $\mathbf{A} = \mathbf{PDQ}$ とすれば、$m < n$（行数＜列数→ $\mathbf{A}$ は横長の行列）だから標準形 $\mathbf{D}$ の第 n 列は必ずゼロ列となる。ゆえに、$\mathbf{De}_n = \mathbf{0}$（$\mathbf{e}_n = [0, \cdots, 0, 1]^T$）。ゆえに、$\mathbf{A}(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{e}_n) = \mathbf{PDQ}(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{e}_n) = \mathbf{PDe}_n = \mathbf{P} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$。すなわち、

$\mathbf{x} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{e}_n \neq \mathbf{0}$ は $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ の非零解の一つを表す。(1)⇒(2)：レッスン 2（2.11 節）で示した計算から従う。■

例 1　$m = 2 < 3 = n$ の場合　方程式 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ は必ず自明解（$x_1 = x_2 = 0$）以外の解をもつ。ここに、$a_{11}, \cdots, a_{23}$ は与えられた数を表す。■

例 2　線形代数の基本定理により $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_{n+1} \in \mathbf{R}^{n\times1}$（または $\mathbf{C}^{n\times1}$）はつねに一次従属である。他方、n 次単位行列の n 列は一次独立である。ゆえに、次元の定義より $\dim \mathbf{R}^{n\times1} = \dim \mathbf{C}^{n\times1} = n$。これはレッスン 2 で示した結果の再掲である。■

例 3　線形代数の基本定理と次元の定義より次の事実も真である：

「m 個のベクトルからなる基底を少なくとも一組もつベクトル空間の次元は m に等しい」

「m 次元ベクトル空間の基底は常に m 個のベクトルから構成される」

これもレッスン 2 で示した結果の再掲に過ぎない。■

5.2　過剰決定系は一般に可解でない

(1)「$\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m\times n}$（または $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{m\times n}$）を与えられた行列とし、$m > n$ とすれば、少なくとも一個の $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^{m\times1}$（または $\mathbf{b} \in \mathbf{C}^{m\times1}$）に対して方程式 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ は解をもたない。すなわち、方程式数が未知数の数より厳密に大きい連立一次方程式（過剰決定系 over-determined system という）は一般に解をもたない。」

同値なのべ方は

(2)「$m > n$ なら、m 次元ベクトル空間内の n 個のベクトルは全空間を張れない。」

証明　(1) $m > n$ ゆえ、同値分解 $\mathbf{A} = \mathbf{PDQ}$ の標準形 $\mathbf{D}$ の最下端行はゼロ行でなければならない。ゆえに方程式 $\mathbf{Ax} = \mathbf{Pe}_m = \mathbf{P}\left[0\cdots01\right]^T$、すなわち、$\mathbf{DQx} = \left[0\cdots01\right]^T$、は明らかに解をもたない。

(1)⇒(2)：問題の m 次元ベクトル空間を $\mathbf{V}$、$\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_m\}$ をその基底、

、$\{\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n\}$ を $\mathbf{V}$ 内のベクトルとすれば、$\left[\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n\right] = \left[\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_m\right] \begin{bmatrix} x\cdots x \\ \cdots\cdots \\ x\cdots x \end{bmatrix} \equiv \left[\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_m\right]\mathbf{B}$ と書けるはずである。ここに $\mathbf{B}$ は $m\times n$ 行列を表す。ゆえに $\{\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n\}$ のスパンは $\left[\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_m\right]\mathbf{Bx}$ 型ベクトルの全体となる（$\mathbf{x}$ は $n\times1$ 変数行列、$\mathbf{B}$ は定行列）。しかし(1)により、$\mathbf{Bx}$ 型ベクトル

は$\mathbf{R}^{m\times 1}$（または$\mathbf{C}^{m\times 1}$）全体を尽すことはできない。ゆえに$\left[\mathbf{v}_1\cdots\mathbf{v}_m\right]\mathbf{Bx}$型ベクトルの全体、すなわち、$\{\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n\}$のスパン、は$\mathbf{V}$全体を尽すことはできない。■

(1)(2)の同値性について説明する。実際、上の証明では(1)を先に証明し、これから(2)を導いたが、逆に(2)を先に示し、これから(1)を示すことも可能である。以下に示す。

(2) の別証：次元の定義から、m次元ベクトル空間はm個のベクトルからなる基底を少なくとも一組もつ。(2)の結論を否定すれば、これらm個のベクトルのそれぞれがn個のベクトルの一次結合として表現できることになり、$m<n$ゆえ、線形代数の基本定理により、これらは全体として一次従属となってしまう。これは矛盾である。(2)⇒(1)：(2)におけるm次元ベクトル空間として$\mathbf{R}^{m\times 1}$（または$\mathbf{C}^{m\times 1}$）をとればよい。■

例　$m=3>2=n$の場合　行列方程式

(1) $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

は少なくとも一組のスカラーb_1,b_2,b_3の値に対して解をもたない。■

5.3　逆行列存在の必要十分条件

与えられた$\mathbf{A}\in\mathbf{R}^{n\times n}$に関する次の各条件は互いに同値である：

(1)　$\mathbf{A}$は逆行列をもつ（$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{I}$を満たす$n$次行列$\mathbf{B}$が存在する）

(2)　$\mathbf{AB}=\mathbf{I}$を満たすn次行列$\mathbf{B}$が存在する

(3)　$\mathbf{BA}=\mathbf{I}$を満たすn次行列$\mathbf{B}$が存在する

(4)　$\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ $(\mathbf{x}\in\mathbf{R}^{n\times 1})$の解は自明解$\mathbf{x}=\mathbf{0}$に限る

(5)　すべての$\mathbf{b}\in\mathbf{R}^{n\times 1}$に対して、$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$は可解である

(6)　$\mathbf{A}$の階数はnに等しい

以上は$\mathbf{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$の場合にも成り立つ。

証明　(1)(4)(5)はそれぞれ(6)と同値、(2)は(5)と同値、(3)は(4)と同値、であることを示す。

(6)⇒(1)(4)(5)：(6)が成立すれば$\mathbf{A}$の同値分解形は$\mathbf{A}=\mathbf{PQ}$（$\mathbf{P},\mathbf{Q}$は可逆行列）となる。これより$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P}^{-1}$となり、(1)は真である。(4)、(5)が成り立つことも簡単に出る。

(6)が偽⇒(1)(4)(5)のどれも偽：(6)が偽なら、同値分解$\mathbf{A}=\mathbf{PDQ}$において、$\mathbf{D}$の最右端列はゼロ列となる。すると$\mathbf{e}_n=[0,\cdots 0,1]^T$をとれば、$\mathbf{De}_n=\mathbf{0}$。ゆえに$\mathbf{x}=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{e}_n\neq\mathbf{0}$をとれば、

$\mathbf{Ax}=(\mathbf{PDQ})(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{e}_n)=\mathbf{PDe}_n=\mathbf{0}$となり、(4)は偽となる。したがって(1)も偽となる。また、(6)が偽なら、$\mathbf{D}$の最下端行はゼロ行となり、$\mathbf{b}=\mathbf{Pe}_n$をとれば$\mathbf{Ax}=\mathbf{Pe}_n$（$\Leftrightarrow$ $\mathbf{DQx}=\mathbf{e}_n$）は明らかに解をもたない。したがって(5)も偽となる。

(2)⇒(5) : (2)が真なら任意の $\mathbf{b}$ に対して $\mathbf{A}(\mathbf{Bb})=\mathbf{b}$ ゆえ、(5)は真となる。

(5)⇒(2) : (5)が真なら $\mathbf{Ab}_j=\mathbf{e}_j$ （$j=1,\cdots,n$）を満たす $\mathbf{b}_j$ をとり、$\mathbf{B}=\left[\mathbf{b}_1\cdots\mathbf{b}_n\right]$ とすれば(2)

が満たされる。ここに $\mathbf{e}_j$ は単位行列の第 j 列を表す。

(3)⇒(4) : (3)が真なら、$\mathbf{0}=\mathbf{Ax}\Rightarrow\mathbf{0}=\mathbf{BAx}=\mathbf{Ix}=\mathbf{x}$。ゆえに、(4)も真となる。
(4)⇒(3) : (4)が真なら、同値分解 $\mathbf{A}=\mathbf{PDQ}$ における $\mathbf{D}$ は $\mathbf{I}$ でなければならないゆえ、$\mathbf{A}=\mathbf{PQ}$ となる。ゆえに、$\mathbf{B}=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P}^{-1}(=\mathbf{A}^{-1})$ をとれば(3)が満たされる。■

以上の証明は同値分解のみを使ってなされた点に再注目。(1)と(4)の同値性は実用性が高い。また、実行列 $\mathbf{A}$ に対して、$\mathbf{A}(\mathbf{B}+i\mathbf{C})=(\mathbf{B}+i\mathbf{C})\mathbf{A}=\mathbf{I}$ （$\mathbf{B},\mathbf{C}$ は実行列）とすれば、簡単な計算で $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\mathbf{I}$ 、$\mathbf{C}=\mathbf{0}$ が得られるから、実行列の逆行列はあくまで実行列である。

例 1　$\mathbf{A}=\left[\mathbf{a}_1\cdots\mathbf{a}_n\right]$ と書き、ベクトルの言葉で(1)(4)(5)を表せば「$\{\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n\}$ は $\mathbf{V}$ の基底を表す」「$\{\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n\}$ は $\mathbf{V}$ を張る」「$\{\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n\}$ は一次独立である」となる。これらはすべて同値である。また、変換の言葉を使えば、(1)(4)(5)はそれぞれ線形変換 $\mathbf{y}=\mathbf{Ax}$ の「全単射性」と「全射性」と「単射性」を表す。これらはすべて同値である。これは有限集合をそれ自体に写す写像と共通する性質である。■

例 2　与えられた n 次元ベクトル空間 $\mathbf{V}$ 内の与えられた n 個のベクトル
$\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n$ に関する次の条件は同値である：
(7)　$\{\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n\}$ は $\mathbf{V}$ の基底を表す
(8)　$\{\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n\}$ は $\mathbf{V}$ を張る
(9)　$\{\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n\}$ は一次独立である
証明は「n 次元ベクトル空間は n 個のベクトルからなる基底を少なくとも一つもつ」ことを使い、$\{\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_n\}$ を $\mathbf{V}$ の基底とすれば $\left[\mathbf{a}_1\cdots\mathbf{a}_n\right]=\left[\mathbf{b}_1\cdots\mathbf{b}_n\right]\begin{bmatrix}a_{11}\cdots a_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}\cdots a_{nn}\end{bmatrix}\equiv\left[\mathbf{b}_1\cdots\mathbf{b}_n\right]\mathbf{A}$ と形式的な行列積の形に書き（$\mathbf{A}$ を $\{\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n\}$ の行列表現と考えよ）、すでに証明した結果を適用すればよい（詳細略）。■

例 3　積の逆行列存在の必要十分条件　与えられた n 次実または複素正方行列 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ に対して、積 $\mathbf{AB}$ の逆行列が存在するための必要十分条件は $\mathbf{A},\mathbf{B}$ の逆行列が同時に存在することである。このとき $(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ が成り立つ。これはレッスン 1、1.11 節でのべたことの再掲であるが、そこでは本節 5.3 の結果を未証明のまま使っている。
証明　（これも再掲）　$(\mathbf{AB})^{-1}$ が存在すれば、$\mathbf{I}=(\mathbf{AB})^{-1}(\mathbf{AB})=\{(\mathbf{AB})^{-1}\mathbf{A}\}\mathbf{B}$、
$\mathbf{I}=(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{A}\{\mathbf{B}(\mathbf{AB})^{-1}\}$ が成り立つ。本節の結果により前者は $\mathbf{B}^{-1}$ の存在を意味し、後者は $\mathbf{A}^{-1}$ の存在を保証する。逆に $\mathbf{A}^{-1}$、$\mathbf{B}^{-1}$ が存在すれば、直接計算で $(\mathbf{AB})\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{I}$、

$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{AB}) = \mathbf{I}$。これは$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$を意味する。■

5.4　階数の特徴づけ

$\mathbf{0} \neq \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m\times n}$ （または$\mathbf{C}^{m\times n}$ ）の階数をr とすれば、 $\mathbf{A}$ の中にr 次可逆小行列が少なくとも一つ存在し、$r+1$ 次以上の小行列はどれも非可逆行列である。

一般に、$\mathbf{A}$ の任意k 行、任意l 列を選び、それ以外の行と列を削除して得られる行列を$\mathbf{A}$ の（$k\times l$）<u>小行列</u> submatrix という。例えば、$[23], [11\ 13], \begin{bmatrix} 11 & 13 \\ 21 & 23 \end{bmatrix}$ は$\begin{bmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \end{bmatrix}$ はそれぞれ$\mathbf{A}$ の1次、1×2 、2 次小行列である。

証明　$\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ としているから、$r > 0$。

まず、LDU 分解を使って$\mathbf{A}$ 内にr 次可逆小行列が存在することを示す。そこで LDU 分解

(1) $\mathbf{PAQ} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{I}_{m-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-r} \end{bmatrix} \equiv \mathbf{LDU}$

を考える。ここに、$\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ は順列行列、$\mathbf{L}_{11}$ はr 次単位下三角行列、$\mathbf{D}_r$ は可逆r 次対角行列（各対角成分$\neq 0$）、$\mathbf{U}_{11}$ はr 次単位上三角行列、を表す。　すると直接計算により

(2)　$\mathbf{PAQ}$ の左上r 次小行列＝$\mathbf{L}_{11}\mathbf{D}_r\mathbf{U}_{11}$＝可逆行列

他方、左辺は$\mathbf{A}$ の適当なr 次小行列の行および列を並び替えたものに等しい（$\because$ $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ は順列行列）。行および列を並び替えても可逆性は保存されるから、このr 次小行列は可逆行列を表す。

次に、同値分解を使って$r+1$ 次以上の小行列はどれも非可逆行列であることを示す。$r < m,\ r < n$ としてよい。 $\mathbf{A}$ の同値分解を

(3)　$\mathbf{A} = \mathbf{U}\begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{V}$　（$\mathbf{U}, \mathbf{V}$ は可逆行列）

とし、 $\mathbf{A}$ 中の任意k 次小行列$\mathbf{A}_k$ を考える（ただし、$r < k \leq \min\{m, n\}$）。行および列を適当に並び替えれば、$\mathbf{A}_k$ を$\mathbf{A}$ の左上に移動させることができる。すなわち､､適当な順列行列$\mathbf{P}_1, \mathbf{Q}_1$ をとれば$\mathbf{A}_k$ は$\mathbf{P}_1\mathbf{AQ}_1$ の左上$k\times k$ ブロックとなることを意味する。これに(3)を考慮すれば、

(4)　$\mathbf{P}_1\mathbf{AQ}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix} = \mathbf{P}_1\mathbf{U}\begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\mathbf{VQ}_1 = \mathbf{P}_1\mathbf{U}\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$

ここに$\mathbf{R}_1$ は$r\times n$ 行列を表す。これより $\mathbf{A}_k$ の形は（$k > r$ ゆえ）

(5)　$\mathbf{A}_k = \mathbf{B}\begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ （$\mathbf{B}: k\times k$ 、$\mathbf{S}: r\times k$ 、$\mathbf{0}: (k-r)\times k$ ）

となる。仮定により、$r < k$ ゆえ、上の$\mathbf{0}$ ブロックは空ブロックではない。ゆえに、$k\times k$ 行列$\begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$

は非可逆行列を表す。従って、$\mathbf{A}_k$ も非可逆行列を表す。■

5.5　$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 型行列方程式の可解必要十分条件

与えられた $\mathbf{A}\in\mathbf{R}^{m\times n}$ 、 $\mathbf{b}\in\mathbf{R}^{m\times 1}$ に対して次の 2 条件は同値である：

(1)「方程式 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ は可解である」

(2)「$\mathbf{y}^T\mathbf{A}=\mathbf{0}$ を満たすすべての $\mathbf{y}\in\mathbf{R}^{m\times 1}$ に対して $\mathbf{y}^T\mathbf{b}=0$ が成立する」

$\mathbf{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$ 、 $\mathbf{b}\in\mathbf{C}^{m\times 1}$ の場合は「$\mathbf{y}^T\mathbf{A}\to\mathbf{y}^*\mathbf{A}$」「$\mathbf{y}^T\mathbf{b}\to\mathbf{y}^*\mathbf{b}$ 」とすればこのまま成立する。

以上は「与えられた $\mathbf{A}$ に対して、 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ が解をもつのはどんな $\mathbf{b}$ に対してか」の一つの答えを与えている。(1)⇒(2)は明らか。(2)⇒(1)が値打ちである。

証明　(1)(2)のそれぞれに同値な第 3 の主張(3)を発見すればよい。(3)の発見に同値分解を利用する。 $\mathbf{A}=\mathbf{0}$ なら、(1)は「$\mathbf{0x}=\mathbf{b}$ が可解」、(2)は「$\mathbf{y}^T\mathbf{0}=0$ を満たすすべての $\mathbf{y}\in\mathbf{R}^{m\times 1}$ に対して $\mathbf{y}^T\mathbf{b}=0$ 」である。(1)は明らかに(3)「$\mathbf{b}=\mathbf{0}$ 」と同値であり、(2)は「すべての $\mathbf{y}\in\mathbf{R}^{m\times 1}$ に対して $\mathbf{y}^T\mathbf{b}=0$ が成立する」と同値であり、これも(3)と同値である。ゆえに (2)⇔(3)⇔(1)。

$\mathbf{A}\neq\mathbf{0}$ の場合は $\mathbf{A}$ の同値分解を $\mathbf{A}=\mathbf{PDQ}$ とする（記号の意味は前と同じ)。すると、

(1）　方程式 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ は可解

$\Leftrightarrow\mathbf{PDQx}=\mathbf{b}$ は可解

$\Leftrightarrow\mathbf{DQx}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{b}$ は可解（$\because$ $\mathbf{P}$ は可逆行列）

$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\mathbf{Qx}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{b}$ は可解（$\because\mathbf{D}=\begin{bmatrix}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}$）

$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\mathbf{z}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{b}$ は可解（$\because\mathbf{Q}^{-1}$ が存在するから、$\mathbf{z}=\mathbf{Qx}\Leftrightarrow\mathbf{x}=\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{z}$ ）

$\Leftrightarrow\mathbf{P}^{-1}\mathbf{b}$ の形は $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{b}=\left[x\cdots x\ 0\cdots 0\right]^T$　（最初の r 成分は任意、最後の $m-r$ 成分は 0 ）

⇔(3) $\mathbf{b}$ の形は $\mathbf{b}=\mathbf{P}\left[x\cdots x\ 0\cdots 0\right]^T$　（最初の r 個の成分は任意、最後の $m-r$ 成分は 0 ）

(2)　$\mathbf{y}^T\mathbf{A}=\mathbf{0}$ を満たすすべての $\mathbf{y}\in\mathbf{R}^{m\times 1}$ に対して $\mathbf{y}^T\mathbf{b}=0$

$\Leftrightarrow\mathbf{y}^T\mathbf{PDQ}=\mathbf{0}$ を満たすすべての $\mathbf{y}\in\mathbf{R}^{m\times 1}$ に対して $\mathbf{y}^T\mathbf{b}=0$ （$\because$ $\mathbf{A}$ の同値分解）

$\Leftrightarrow\mathbf{y}^T\mathbf{PD}=\mathbf{0}$ を満たすすべての $\mathbf{y}\in\mathbf{R}^{m\times 1}$ に対して $\mathbf{y}^T\mathbf{b}=0$ （$\because$ $\mathbf{Q}^{-1}$ の存在性）

$\Leftrightarrow\mathbf{y}^T=\left[0\cdots 0\ x\cdots x\right]\mathbf{P}^{-1}$ 型（最初の r 個の成分はすべて 0 、最後の $m-r$ 個の成分は任意）

のすべての $\mathbf{y}\in\mathbf{R}^{m\times 1}$ に対して $\mathbf{y}^T\mathbf{b}=0$ （$\because\mathbf{D}=\begin{bmatrix}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}$、$\mathbf{A}\neq\mathbf{0}$ ゆえ $r\geq 1$）

$\Leftrightarrow\left[0\cdots 0\ x\cdots x\right]\mathbf{P}^{-1}\mathbf{b}=0$ （最後の $m-r$ 個の成分は任意）

$\Leftrightarrow \mathbf{P}^{-1}\mathbf{b} = \left[y \cdots y \ 0 \cdots 0 \right]^T$ （最初の r 個の成分は任意）

$\Leftrightarrow \mathbf{b}$ の形は $\mathbf{b} = \mathbf{P}\left[x \cdots x \ \ 0 \cdots 0 \right]^T$ 　（最初の r 個の成分 $x \cdots x$ は任意）

この最後の条件は(3)に他ならない。これで(1)⇔(3)⇔(2)が示された。■

例 1　$R(\mathbf{A}) = N(\mathbf{A}^T)^{\perp}$ 。 すなわち、$\mathbf{A}$ の値域は $\mathbf{A}^T$ の零空間の直交補空間（＝ $N(\mathbf{A}^T)$ 内のすべてのベクトルに直交するようなベクトル全体）に等しい。これは上で示した事実の言い換えに過ぎない。一般に $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = 0$ のとき、$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ は直交する orthogonal, perpendicular といい、$\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ と書く（レッスン 3 参照）。■

例2　任意の $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m\times n}$ に対して $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A})^{\perp\perp}$ （＝ $(R(\mathbf{A})^{\perp})^{\perp}$ ）。　これも本節で示した事項の簡単な読み替えを表す。実際、(1)「$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ は可解」は「$\mathbf{b} \in R(\mathbf{A})$」と同値、(2)「$\mathbf{y}^T\mathbf{A} = \mathbf{0}$ を満たすすべての $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^{m\times 1}$ に対して $\mathbf{y}^T\mathbf{b} = 0$」中の「$\mathbf{y}^T\mathbf{A} = \mathbf{0}$」は「すべての $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n\times 1}$ に対して $\mathbf{y}^T\mathbf{Ax} = 0$」と同値、すなわち、「$\mathbf{y} \in R(\mathbf{A})^{\perp}$」と同値である。ゆえに(2)は「すべての $\mathbf{y} \in R(\mathbf{A})^{\perp}$ に対して $\mathbf{y}^T\mathbf{b} = 0$」と同値となり、これは「$\mathbf{b} \in R(\mathbf{A})^{\perp\perp}$」と読める。これが(1)「$\mathbf{b} \in R(\mathbf{A})$」と同値なのだから、結局 $R(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A})^{\perp\perp}$ 。■

例 3　任意の部分空間 $S \subseteq \mathbf{R}^{m\times 1}$ に対して $S = S^{\perp\perp}$ 。 これは例 2 の読み替えに過ぎない。実際、任意の部分空間はその基底のスパンに等しいから、必ず適当な $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m\times n}$ の値域として表現できることを使えばよい。■

例 4　$N(\mathbf{A}) = R(\mathbf{A}^T)^{\perp}$　これは例 1・例 3 から簡単に出る。■

例 5　$\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m\times n}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^{m\times 1}$ とすれば、たとえ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ が可解でなくても、正規方程式 normal equation $\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$ は必ず可解である。実際、本節の結果を使うと、$\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$ は可解 $\Leftrightarrow \mathbf{y}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{0}$ を満たすすべての $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^{m\times 1}$ に対して $\mathbf{y}^T\mathbf{A}^T\mathbf{b} = 0$。ところが、$\mathbf{y}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{y}^T\mathbf{A}^T\mathbf{Ay} = (\mathbf{Ay})^T\mathbf{Ay} = 0 \Rightarrow \mathbf{Ay} = \mathbf{0}$ 。この逆も真である。ゆえに「$\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$ は可解 $\Leftrightarrow \mathbf{Ay} = \mathbf{0}$ を満たすすべての $\mathbf{y}$ に対して $(\mathbf{Ay})^T\mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{b}$ は全く任意」が成り立つ。同様に複素行列方程式 $\mathbf{A}^*\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^*\mathbf{b}$ も任意の $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{m\times n}, \mathbf{b} \in \mathbf{C}^{m\times 1}$ に対して可解である。

正規方程式の解は次の特徴をもつ：$\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$ の任意解を $\mathbf{x} = \mathbf{x}_N$ とすれば、任意の $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n\times 1}$ に対して、$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{Ax}_N - \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_N)\|^2$ （$\|\mathbf{y}\|^2 \equiv \mathbf{y}^T\mathbf{y}$ 、ここに $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^{m\times 1}$ ）が成立するゆえ（計算略）、$\mathbf{x}$ が $\mathbf{R}^{n\times 1}$ 全体を動くとき、$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2$ は $\mathbf{x} = \mathbf{x}_N$ のとき最小値をとることがわかる。すなわち、正規方程式の解は最小自乗法問題「$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2$ ＝最小」の解となっている。■

例 6　任意の $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m\times n}$ に対して、$R(\mathbf{AA}^T) = R(\mathbf{A})$　すなわち、 $\mathbf{AA}^T$ と $\mathbf{A}$ の値域は全く同一である。実際、この節の結果を使うと「$\mathbf{b} \in R(\mathbf{AA}^T) \Leftrightarrow \mathbf{AA}^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$ は可解 $\Leftrightarrow \mathbf{y}^T\mathbf{AA}^T = \mathbf{0}$ な

ら必ず $\mathbf{y}^T\mathbf{b}=0$」。例 2 で示したように「$\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{A}^T=\mathbf{0}\Leftrightarrow\mathbf{y}^T\mathbf{A}=\mathbf{0}$」が成り立つ。これを上の結果中に使うと「$\mathbf{b}\in R(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)\Leftrightarrow\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{x}=\mathbf{b}$ は可解$\Leftrightarrow\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ は可解$\Leftrightarrow\mathbf{b}\in R(\mathbf{A})$」が出る。■

5.6　値域と零空間

与えられた $\mathbf{0}\neq\mathbf{A}\in\mathbf{R}^{m\times n}$（または $\mathbf{C}^{m\times n}$）の同値分解を

(1)　$\mathbf{A}=\mathbf{P}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\mathbf{Q}\equiv\mathbf{PDQ}$（$\mathbf{P},\mathbf{Q}$ は可逆行列、r は $\mathbf{A}$ の階数）

とすれば、$\mathbf{P}$ の最初の r 列は $\mathbf{A}$ の値域 $R(\mathbf{A})$ の基底を表し、

(2)　$\dim R(\mathbf{A})=r$

が成り立つ。また、$\mathbf{Q}^{-1}$ の最後の $n-r$ 列は $\mathbf{A}$ の零空間 $N(\mathbf{A})$ の基底を表し、

(3)　$\dim N(\mathbf{A})=n-r$

が成り立つ。ゆえに、

(4)　$r+\dim N(\mathbf{A})=n$（$=\mathbf{A}$ の列数）。

証明　$\mathbf{0}\neq\mathbf{A}\in\mathbf{R}^{m\times n}$ の場合に特定する。任意の $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^{n\times 1}$ に対して

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{PDQx}=\left[\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_r,\cdots,\mathbf{p}_m\right]\begin{bmatrix}\mathbf{I}_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\mathbf{Qx}=\left[\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_r,\mathbf{0},\cdots,\mathbf{0}\right]\mathbf{Qx}\text{（}\mathbf{p}_j\text{ は }\mathbf{P}\text{ の第 }j\text{ 列）}$$

$$=y_1\mathbf{p}_1+\cdots+y_r\mathbf{p}_r\text{（}\mathbf{Qx}=\mathbf{y}\equiv[y_1,\cdots,y_n]^T\text{）}$$

$\mathbf{x}$ が $\mathbf{R}^{n\times 1}$ 内を自由に動くと、$\mathbf{Q}$ は可逆行列ゆえ、$\mathbf{Qx}$ も $\mathbf{R}^{n\times 1}$ 内全体を動く。ゆえに、$R(\mathbf{A})=\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_r$ の一次結合全体。しかも、$\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_r$ は可逆行列の列だから一次独立である。ゆえに、$\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_r$ は $R(\mathbf{A})$ の基底を表し、$\dim R(\mathbf{A})=r$。

次に、　$\mathbf{x}\in N(\mathbf{A})\Leftrightarrow$　$\mathbf{0}=\mathbf{Ax}$（定義）$\Leftrightarrow$　$\mathbf{0}=\mathbf{PDQx}$（$\because$ 同値分解(1)）$\Leftrightarrow$　$\mathbf{DQx}=\mathbf{0}$

（$\because\mathbf{P}^{-1}$ が存在する）$\Leftrightarrow$　$\mathbf{Qx}=\left[0\cdots0\ x\cdots x\right]^T$（$\because\mathbf{D}$ の形 0 の個数は r 個）

$\Leftrightarrow\mathbf{x}=\mathbf{Q}^{-1}\left[0\cdots0\ x\cdots x\right]^T\Leftrightarrow$　$\mathbf{x}$ は $\mathbf{Q}^{-1}$ の最終 $n-r$ 列の一次結合。以上により、$N(\mathbf{A})$ は $\mathbf{Q}^{-1}$ の最終 $n-r$ 列の一次結合全体に等しい。これらは可逆行列の列だから一次独立である。ゆえにこれら $n-r$ 列は $N(\mathbf{A})$ の基底を表し、$\dim N(\mathbf{A})=n-r$。■

例 1 前節の結果と合わせると、$rank(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)=rank(\mathbf{A})=rank(\mathbf{A}^T)$ が成り立つ。また、次式も真である：$rank(\mathbf{A}\mathbf{A}^*)=rank(\mathbf{A})=rank(\mathbf{A}^*)$。

5.7 階数の同値な定義

今後の参照用に $\mathbf{A}\in\mathbf{R}^{m\times n}$（または $\mathbf{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$）の階数 $rank(\mathbf{A})$ の同値な定義を以下にまとめよう：

(a)　$\mathbf{A}$ の同値分解標準形に含まれる 1 の総数；

(b)　$\mathbf{A}$ の値域の次元：$rank(\mathbf{A}) = \dim R(\mathbf{A})$；

(c)　$\mathbf{A}^T$ の値域の次元：$rank(\mathbf{A}) = \dim R(\mathbf{A}^T)$；

(d)　列の最大一次独立集合に含まれる列数；

(e)　行の最大一次独立集合に含まれる行数；

(f)　列数－零空間の次元：$rank(\mathbf{A}) = n - \dim N(\mathbf{A})$（$N(\mathbf{A})$ は $\mathbf{A}$ の零空間を表す）；

(g)　$\mathbf{A}$ 中の可逆小行列の最大次数

証明　証明は(d)(e)を除いてこのレッスンで済んでいる。(d)は問題の一次独立な集合は $R(\mathbf{A})$ の基底を表し、(e)は問題の一次独立な集合の転置行列が $R(\mathbf{A}^T)$（$R(\mathbf{A}^*)$）の基底を表す、ことに着目すればよい。■

5.8 次元定理

有限次元ベクトル空間 $\mathbf{V}$ の任意部分空間 $\mathbf{S},\mathbf{T}$ に対して次の次元恒等式が成立する：

(1)　$\dim \mathbf{S} \cap \mathbf{T} = \dim \mathbf{S} + \dim \mathbf{T} - \dim(\mathbf{S} + \mathbf{T})$

(2)　$\mathbf{S} \cap \mathbf{T} = \{\mathbf{0}\}$ なら $\dim \mathbf{S} + \dim \mathbf{T} = \dim(\mathbf{S} + \mathbf{T})$

(3)　$\dim \mathbf{S} + \dim \mathbf{T} > \dim \mathbf{V}$ なら $\mathbf{S} \cap \mathbf{T}$ は非零ベクトルを含む

証明　$\mathbf{S} + \mathbf{T}$ とは $\mathbf{s} + \mathbf{t} (\mathbf{s} \in \mathbf{S}, \mathbf{t} \in \mathbf{T})$ 型ベクトル全体の集合を表す（$\mathbf{S} \cup \mathbf{T}$ とは違う）。$\mathbf{S},\mathbf{T}$ が部分空間なら、$\mathbf{S} + \mathbf{T}$ も $\mathbf{S} \cap \mathbf{T}$ も部分空間となる。以下の証明は証明済みの事実「部分空間の次元はその任意基底に含まれるベクトルの総数に等しい」「任意部分空間は必ず基底をもつ」「任意の一次独立な部分集合は基底に拡張できる」を使う。

(2)(3)は(1)から簡単に出るから、(1)の証明のみを考える。さて、$\mathbf{S} \cap \mathbf{T}$ の基底を一つ取りそれを $\{\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k\}$ とする（$\mathbf{S} \cap \mathbf{T}$ が $\{\mathbf{0}\}$ なら空集合である）。ゆえに $\dim(\mathbf{S} \cap \mathbf{T}) = k$。$\mathbf{S} \cap \mathbf{T}$ の基底を $\mathbf{S},\mathbf{T}$ の基底に拡張し、それぞれ、$\{\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_l\}$、$\{\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k, \mathbf{c}_1, \cdots, \mathbf{c}_m\}$ とする。すると、$\dim \mathbf{S} = k + l,\ \dim \mathbf{T} = k + m$。

つぎに $\{\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_l, \mathbf{c}_1, \cdots, \mathbf{c}_m\}$ は $\mathbf{S} + \mathbf{T}$ の基底であること示す。そうすれば $\dim(\mathbf{S} + \mathbf{T}) = k + l + m$ となり、これまでの結果と合わせると証明が完結する。

集合 $\{\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_l, \mathbf{c}_1, \cdots, \mathbf{c}_m\}$ が $\mathbf{S} + \mathbf{T}$ を張ることは直ちに出るから、これが一次独立であることを示せば十分である。そこで、$\alpha_1, \cdots, \beta_1, \cdots, \gamma_1, \cdots$ をスカラーとし、方程式

$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \cdots \alpha_k \mathbf{a}_k + \beta_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + \beta_l \mathbf{b}_l + \gamma_1 \mathbf{c}_1 + \cdots + \gamma_m \mathbf{c}_m = \mathbf{0}$ を考える。

$\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \beta_1 = \cdots = \beta_l = \gamma_1 = \cdots \gamma_m = 0$ を示せば十分である。そこで上式を

$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \cdots \alpha_k \mathbf{a}_k + \beta_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + \beta_l \mathbf{b}_l = -(\gamma_1 \mathbf{c}_1 + \cdots + \gamma_m \mathbf{c}_m) \equiv \mathbf{d}$ と書き直すと、左辺は $\mathbf{S}$ 内のベクトル、右辺は $\mathbf{T}$ 内のベクトルを表すから、$\mathbf{d}$ は $\mathbf{S} \cap \mathbf{T}$ 内のベクトルを表す。ゆえに、$\mathbf{d}$ は $\mathbf{S} \cap \mathbf{T}$ の基底 $\{\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k\}$ によって一意的に $\mathbf{d} = \delta_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \delta_k \mathbf{a}_k$（$\delta_1, \cdots$ は適当なスカラー）の形に展開できることになる。この式を直前の式に用いて整頓すると

$\delta_1 \mathbf{a}_1 + \cdots + \delta_k \mathbf{a}_k + \gamma_1 \mathbf{c}_1 + \cdots + \gamma_m \mathbf{c}_m = \mathbf{0}$、$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \cdots \alpha_k \mathbf{a}_k + \beta_1 \mathbf{b}_1 + \cdots + \beta_l \mathbf{b}_l = \mathbf{0}$

$\{\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k, \mathbf{c}_1, \cdots, \mathbf{c}_m\}$ は $\mathbf{T}$ の基底、$\{\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_k, \mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_l\}$ $\mathbf{S}$ の基底であるであることを考慮すれば $\delta_1 = \cdots = \delta_k = \gamma_1 = \cdots \gamma_m = 0$、$\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = \beta_1 = \cdots \beta_l = 0$ が得られる。■

上で示した次元定理はどの線形代数の教科書にも書いてある有名定理であるが、応用例の示されることは少ない。このコンテンツではレッスン 8「シュール分解と QR 分解 Part II」においてエルミート行列の固有値単調性を示すのに使う。また、レッスン 11「特異値分解と CS 分解 Part I」で部分空間間の距離を評価する問題においても使う。

5.9　LDU 分解の行列方程式解法への応用

与えられた n 次可逆行列 $\mathbf{A}$ の LDU 分解 $\mathbf{PAQ}=\mathbf{LDU}$ がわかれば、行列方程式 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$（$\mathbf{b}$ は n 次既知ベクトル）は $\mathbf{LDUQ}^T\mathbf{x}=\mathbf{Pb}$ と同値ゆえ、$\mathbf{Ly}=\mathbf{Pb}\to\mathbf{DUQ}^T\mathbf{x}=\mathbf{y}$ をこの順に解けばよい。ただ、LDU 分解は、通常、行交換つきガウスの消去法により、$\mathbf{PA}=\mathbf{LU}$ の LU 分解形で得られることが多い。ここに、$\mathbf{P}$ は順列行列、$\mathbf{L}$ は単位下三角行列かつ $|l_{ij}|\le 1$、$\mathbf{U}$ は上三角行列を表す。この場合 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ の解は $\mathbf{Ly}=\mathbf{Pb}$、$\mathbf{Ux}=\mathbf{y}$ をこの順に解いて得られる。

$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ を多数の $\mathbf{b}$ に対して解く場合でも $\mathbf{A}$ の LU 分解を使うのがよい。とくに、$\mathbf{A}^{-1}$ を陽に計算したい場合は $\mathbf{Ax}_j=\mathbf{e}_j\,(j=1,\cdots,n)$ を解けば、$\mathbf{A}^{-1}=\left[\mathbf{x}_1\cdots\mathbf{x}_n\right]$ が得られる。

以上の方法は n の値が中程度の蜜行列に適することが知られている。詳しくは数値解析の専門書を参照されよ。

例 1　LU 分解：$\mathbf{PA}\equiv\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.1&4.2&5.3\\0.2&0&6.1\\1&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0.1&1&0\\0.2&-0.1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{bmatrix}\equiv\mathbf{LU}$ が与えられれば、$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}=\begin{bmatrix}5.2&5.9&2\end{bmatrix}^T$ の解は $\mathbf{Ly}=\mathbf{Pb}$、$\mathbf{Ux}=\mathbf{y}$ をこの順に解いて得られる。実際に解けば $\mathbf{y}=\begin{bmatrix}2&5&6\end{bmatrix}^T$、$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}-1&0&1\end{bmatrix}^T$。■

最後にひとこと：　このレッスンでは、同値分解／LDU 分解から出てくる重要事項を学んだ。これらは線形代数の真の入門口を表す。個々の事実を記憶するのも大切だが、導出法をマスターしておけば忘れても再生可能である。

腕試し問題

問題 5.1 簡単な計算問題　$\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{PDQ}$ は同値分解を表す。

$\mathbf{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ を確かめよ。$\mathbf{Qx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \equiv \mathbf{e}_3$ を満たす $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T \in \mathbf{R}^{3\times 1}$ は $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$

を満たすはずである。$\mathbf{Qx} = \mathbf{e}_3$ を解き、解を直接 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ に代入して検算せよ。

(3) $\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T$ の同値分解を求め、$\mathbf{A}^T\mathbf{x} = \mathbf{b}$ $(\mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{1\times 1})$ が解をもたないような

$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}^T \in \mathbf{R}^3$ の例を示せ。

（答：$\mathbf{A}^T \equiv \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^T\mathbf{D}^T\mathbf{P}^T$ ゆえ、要求される $\mathbf{b}$ の例としては

$\mathbf{b} = \mathbf{Q}^T \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ または $\mathbf{Q}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ をとればよい。■）

問題 5.2　次を示せ：(1)与えられた $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m\times n}$ に対して方程式 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ が非零解 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n\times 1}$ をもてば、$\mathbf{A}$ の標準形の最右端列はゼロ列である。

(2)　$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}(\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n\times 1})$ が零解のみをもてば、$m \geq n$ かつ $\mathbf{A}$ の標準形は $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ である。

（略証　同値分解を直接利用により解決する。■）

問題 5.3　レッスン 4 の復習問題である。どんな 3 次可逆行列 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$、4 次可逆行列 $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$ に対しても次の等式は成立し得ないことを示せ：$\mathbf{P}_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}_1 = \mathbf{P}_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{Q}_2$。

（略証　4.5 節参照。■）

問題 5.4　5.3、5.7 節の応用問題

$m \neq n$ なら、任意の $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m\times n}$ に対して $\mathbf{AX} = \mathrm{I}_m$ と $\mathbf{XA} = \mathbf{I}_n$ を同時に満たす $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{n\times m}$ は存在しないことを示せ。

（略証　結論を否定すると、$\mathbf{XA} = \mathbf{I}_n$ を満たす $\mathbf{X}$ が存在する⇒ $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ の解は零解のみ⇒

$m \geq n$（線形代数の基本定理)。そして、$\mathbf{AX} = \mathrm{I}_m$ を満たす $\mathbf{X}$ が存在する⇒ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ はすべての $\mathbf{b}$ に対して可解⇒ $m > n$ ではありえない（5.2 節)。以上から $m = n$ 。■）

問題 5.5　転置行列の逆行列（復習）

$\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ が逆行列をもてば $\mathbf{A}^T$ も逆行列をもち、$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$ であることを示せ（$\mathbf{A}^{TT} = \mathbf{A}$ だから逆も真である)。

（略証　$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$ において転置を取れ。■）

問題 5.6　3 個以上の積の逆行列　n 次行列 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \cdots, \mathbf{C}$ に対して、$(\mathbf{AB}\cdots\mathbf{C})^{-1}$ が存在するための必要十分条件は各行列の逆行列が存在することであることを示せ。また $(\mathbf{AB}\cdots\mathbf{C})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\cdots\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ であることを示せ。

（略証　$\mathbf{AB}\cdots\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\cdots\mathbf{C}) \equiv \mathbf{AX}$ と書いて 5.3 節の結果を繰り返し適用。■）

問題 5.7 対角行列の逆行列同値性「$\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ が逆行列をもつ⇔ $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}(\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{n \times 1})$ の解は $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ に限る」（5.3 節）を用いて「対角行列 $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$ が逆行列をもつ⇔各対角成分 d_1, d_2, d_3 は非零である」を示せ。そして、$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} d_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & d_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & d_3^{-1} \end{bmatrix}$ を検算せよ。

（略証　「$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$ の解は零解のみ⇔ $d_i \neq 0\,(i = 1, 2, 3)$」を確認。■）

問題 5.8 三角行列の逆行列

復習：対角成分より下の成分がすべて 0 であるような正方行列を上三角行列、その転置形を下三角行列、あわせて三角行列という。$\begin{bmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$ は 3 次上三角行列の一般形、$\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ x & x & 0 \\ x & x & x \end{bmatrix}$ は 3 次下三角行列の一般形である。次を示せ：

(a) 三角行列が逆行列をもつ⇔各対角成分が 0 ではない

(b) 上（下）三角行列の逆行列は上（下）三角行列であり、逆行列の各対角成分は元の行列の対応する対角成分の逆数である。

例：$\begin{bmatrix} d_1 & x & x \\ 0 & d_2 & x \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} d_1^{-1} & y & y \\ 0 & d_2^{-1} & y \\ 0 & 0 & d_3^{-1} \end{bmatrix}$（$d_i \neq 0, i = 1,2,3,\ x, y$ は零または非零成分を表す）

（略証　(a)　$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$ 、$\mathbf{A}^{TT} = \mathbf{A}$ を考慮すると、上三角行列の場合だけ、考えておけば十分である。「上三角行列 $\mathbf{A}$ の各対角成分が非零である⇒ $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ の解は $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ に限る」「上三角行列 $\mathbf{A}$ の対角成分が 0 を含む⇒ $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ が非零解をもつ」を示せばよい。前者の証明は簡単。後者の証明は例えば　$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0^* & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$ なら、＊印の 0 に着目し、左上 3 x 4 行列に線形代数の基本定理を適用し、$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ を満たす非零解を作り出す。

(b)　もっとも単純なやり方は、$\mathbf{AX} = \mathbf{I}$ を考え、対応する成分を等置し、$\mathbf{A}$ が可逆上三角行列なら $\mathbf{X}$ も上三角行列となることを示す。別法として、数学的帰納法による証明も可能：$\mathbf{T}$ が可逆行列、$d \neq 0$ なら、$\begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{u} \\ \mathbf{0} & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{T}^{-1} & -(1/d)\mathbf{T}^{-1}\mathbf{u} \\ \mathbf{0} & 1/d \end{bmatrix} = \mathbf{I}$ が成り立つことを使う。■）

問題 5.9　ベクトル空間 $\mathbf{V}$（$\dim \mathbf{V} = n > 0$）の 2 組の基底 $\{\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n\}$、$\{\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n\}$ を考える。基底の性質より各 $\mathbf{b}_j$ $(j = 1, \cdots, n)$ は $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ の一次結合として表現できるはずである。これは形式的な行列積形 $[\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n] = [\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n]\begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{bmatrix} \equiv [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n]\mathbf{A}$ によって表現できる。右辺第 2 項の n 次行列 $\mathbf{A}$ は可逆行列であることを示せ。

（略証　$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ は零解以外の解をもたないことを示せ。■）

問題 5.10 簡単な計算問題　(1) 方程式 $\mathbf{Ax} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{b}$ はどんな $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^{2\times 1}$ に対して解をもつかを直接計算と 5.5 節の結果を使う方法の両方で調べよ。

(2)　$\mathbf{Ax} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{b}$　どんな $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^{2\times 1}$ に対して解をもつかを直接計算と 5.5 節の結果を使う方法の両方で調べよ。

（解　(1) すべての $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^{2\times 1}$　(2) $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix}$ 型のすべての $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^{3\times 1}$　■）

問題 5.11　$\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m\times n}$、$m \geq n$、$rank(\mathbf{A}) = n$ とすれば、$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ は可逆行列であることを示せ。

（略証　5.7 節の結果を利用し、$rank(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = rank(\mathbf{A}^T) = rank(\mathbf{A}) = n$ をいう。$\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ は n 次行列である。■）

問題 5.12　階数に関する問題　次を示せ：

(1) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$（$\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{k\times l}, \mathbf{C} \in \mathbf{R}^{p\times q}$）とすれば $rank(\mathbf{A}) = rank(\mathbf{B}) + rank(\mathbf{C})$

(2) $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m\times n}, \mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n\times p}$ なら、$rank(\mathbf{AB}) \leq rank(\mathbf{A})$、$rank(\mathbf{AB}) \leq rank(\mathbf{B})$

(3)　可逆行列を左から掛けても、右から掛けても行列の階数は不変である

(4)　ゼロ行またはゼロ列を付け加えても削除しても行列の階数は不変である。

（略証　(1) $\begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1\mathbf{B}\mathbf{Q}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2\mathbf{C}\mathbf{Q}_2 \end{bmatrix}$ 型の同値分解を利用。(2)

$R(\mathbf{AB}) \subseteq R(\mathbf{A}),\ N(\mathbf{AB}) \supseteq N(\mathbf{B})$、$\dim R(\mathbf{A}) + \dim N(\mathbf{A}) = n, \dim R(\mathbf{A}) = rank(\mathbf{A})$ を利用（5.7 節参照）。(3)(4) 同値分解と 5.7 節の結果を利用。■）

問題 5.13　階数に関する復習問題。$m \times n$ 行列 $\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right]$ は「$i \neq j$ なら $a_{ij} = 0$」という性質をもつという。対角成分 $a_{11}, a_{22}, \cdots$ のうち、非零成分の個数を r とすれば、$\mathbf{A}$ の階数は r に等しいことを示せ。

（略証　$rank(\mathbf{A}) = \dim R(\mathbf{A})$ を利用。5.7 節参照。■）

問題 5.14　よく知られた逆行列の計算法

(1)　$\mathbf{A} = \left[a_{ij} \right] \in \mathbf{R}^{n\times n}$ を与えられた行列とするとき、その右側に単位行列を付加してできる $n \times 2n$ 行列 $\left[\mathbf{A} \ \ \mathbf{I} \right]$（拡大行列 augumented matix という）を考える。いま拡大行列に対して 3 種の行演算「2 行を交換する」「特定の行を非零倍する」「特定の行のスカラー倍を他行から引く」のみを用いて $\left[\mathbf{A} \ \ \mathbf{I} \right] \to \left[\mathbf{I} \ \ \mathbf{X} \right]$ 型行列に変換したとすれば、$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$ であることを示せ。

(2)　以上の結果を用いて $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 7\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ の逆行列を計算せよ。

(3)　同じ計算法を用いて $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}6 & -2 & -3\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ を示せ。

（略解　(1)　問題の行演算は適当な可逆行列（$\mathbf{K}_1,\cdots,\mathbf{K}_l$ と記そう）を左から掛けることと同じだから（レッスン 1 腕試し問題参照)、問題の変換 $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{X}\end{bmatrix}$ は、$\mathbf{K}_l\cdots\mathbf{K}_1\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{I}\end{bmatrix}=$

$\begin{bmatrix}(\mathbf{K}_l\cdots\mathbf{K}_1)\mathbf{A} & \mathbf{K}_l\cdots\mathbf{K}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{X}\end{bmatrix}$ を意味する。これから $\mathbf{X}=\mathbf{K}_l\cdots\mathbf{K}_1=\mathbf{A}^{-1}$ が従う。

(2)　$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{I}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 7 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 3 & 7 & 1 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -2 & 7\\ 0 & 1 & 1 & -3\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{X}\end{bmatrix}$

以上の結果から、$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{X}=\begin{bmatrix}-2 & 7\\ 1 & -3\end{bmatrix}$ が得られる。検算されるとよい。(3) 略　■）

問題 5.15　(階数に関する復習) 与えられた行列は 3 次可逆小行列を少なくとも一つもち、4 次以上の小行列はことごとく非可逆であるという。この行列の階数はいくらか。

（解　階数は 3 である。5.7 節参照。■）

問題 5.16　LU 分解 $\mathbf{A}\equiv\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 0\\ 7 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -6\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\equiv\mathbf{LU}$ を検算し、これを利用して

$\mathbf{Ax}=\begin{bmatrix}5 & 11 & 15\end{bmatrix}^T\equiv\mathbf{b}$ を解け。

（略解 $\mathbf{Ly}=\mathbf{b}\to\mathbf{Ux}=\mathbf{y}$ の順に解く。$\mathbf{y}=\begin{bmatrix}5 & -9 & -2\end{bmatrix}^T$、$\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\end{bmatrix}^T$　■）