レッスン　6　行列式

概要はレッスン 3、3.3 節参照。行列式は正方行列の各行および各列から 1 個かつ 1 個のみの成分を取りだして掛け合わせたものに適当な符号を与えたものを、すべて加え合わせたものとして定義される。符号の与え方は後述。今日では行列式は理論的ツールとしてのみの存在意義をもつ。とくに「正方行列の可逆性とその行列式の非零性は同値である」「連立一次方程式の解は各未知数が行列式の比で表される（クラーメルの解法）」は応用が広い。また、解析幾何学における基本的な量は行列式の簡単な代数式で表される。行列式自体、それが決定する平行多面体の符号付一般化体積を表す。このレッスンでは行列式に関する基礎的事項を学ぶ。

6.1　行列式の定義

行列式 determinant は正方行列に対してのみ定義される。行列 $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]\in\mathbf{R}^{n\times n}$ （または $\mathbf{C}^{n\times n}$ ）の行列式（$\det\mathbf{A}$ と記す）とは次式で定義されるスカラー値をいう：

$$\det\mathbf{A}=\det\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}=\sum_{(i_1,\cdots,i_n)}\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1&\cdots&n\\ i_1&\cdots&i_n\end{pmatrix}a_{i_1,1}\cdots a_{i_n,n}$$

ここに右辺の和は $1,\cdots,n$ のすべての順列 $(i_1,\cdots,i_n)$ についてとり、符号数 signature $\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}\cdots\\ \cdots\end{pmatrix}$ の値は基準順列 $(1,\cdots,n)$ から見て $(i_1,\cdots,i_n)$ が偶順列 even permutation なら 1、奇順列 odd permutation なら -1 を表す。これらの定義は次節において行う。

上の定義式は複雑そうに見えるが、レッスン 3 でのべたように、グラスマン代数のアイデアを借用すれば、忘れない。すなわち、$\det\mathbf{A}=\det\left[\mathbf{a}_1\cdots\mathbf{a}_n\right]=\det\left[\sum a_{i1}\mathbf{e}_i\cdots\sum a_{in}\mathbf{e}_i\right]$ と書き変え、これから det 記号と[ ]記号をはずし、見かけ上の積形 $(\sum a_{i1}\mathbf{e}_i)\cdots(\sum a_{in}\mathbf{e}_i)$ に書き、順序を尊重して $\alpha\mathbf{e}_p\cdots\mathbf{e}_i\cdots\mathbf{e}_j\cdots\mathbf{e}_q$ 型の積の和（n^n 個項の和）に展開し、$\mathbf{e}_1\cdots\mathbf{e}_n=1$、代表的な積形 $\mathbf{e}_p\cdots\mathbf{e}_i\cdots\mathbf{e}_j\cdots\mathbf{e}_q$ 中の任意の 2 項 $\mathbf{e}_i$ と $\mathbf{e}_j$ を交換すれば符号のみ反転、等しい 2 項を含むものは 0（たとえば $\cdots\mathbf{e}_1\cdots\mathbf{e}_1\cdots$ の型の項は 0 ）という規則を適用して得られる値が $\det\mathbf{A}$ となる（次例参照）。グラスマン代数は行列式研究に適していることはよく知られているが、このコンテンツでは通常の方法に従う。

例 1　2 次行列式をグラスマン代数によって求める。

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \det\left[a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 \quad a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2\right]$$

$$= (a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2)(a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2)$$
$$= a_{11}a_{12}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + a_{11}a_{22}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + a_{21}a_{12}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + a_{21}a_{22}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2$$
$$= a_{11}a_{12}0 + a_{11}a_{22}1 + a_{21}a_{12}(-1) + a_{21}a_{22}0 \quad （\because \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 = 0, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -1）$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \quad \blacksquare$$

6.2 偶順列と奇順列

相異なる n 個のものを並べたもの $(p_1, \cdots, p_n)$ を<u>順列</u> permutation という。個々のもの p_i をここでは<u>成分</u>と呼ぶことにする。例えば、(231)（区切り記号を略す）は $\{1,2,3\}$ の順列である。$\{1, \cdots, n\}$ の順列は $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ 通りある。

n 個のもの順列の中から基準となるもの $(p_1, \cdots, p_n)$ を任意に一つ取り、任意順列 $(q_1, \cdots, q_n)$ の成分のすべての順序対

$$(q_1, q_2)\ (q_1, q_3)\ \cdots\ (q_1, q_n)\ ;\ (q_2, q_3)\ \cdots\ (q_2, q_n)\ ;\ \cdots\cdots\ ;\ (q_{n-1}, q_n)$$

を考える。順序対の総数は $(n-1) + \cdots + 1 = n(n-1)/2$ 個である。順序対 (q_i, q_j) における q_i と q_j の現れる順が基準順列 $(p_1, \cdots, p_n)$ 中と同じなら（すなわち、$(p_1, \cdots, q_i, \cdots, q_j, \cdots, p_n)$ となっていれば)、この順序対を<u>正順序対</u>、そうでなければ<u>逆順序対</u>と呼ぼう。そして、逆順序対の総数が偶数なら、$(q_1, \cdots, q_n)$ を（基準順列 $(p_1, \cdots, p_n)$ に関して）<u>偶順列</u> even p.、奇数なら<u>奇順列</u> odd p.といい、この区別を<u>偶奇性</u> parity という。そして偶順列に $+1$、奇順列に -1 を対応させる関数を符号数 signature といい、記号で $\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} p_1 \cdots p_n \\ q_1 \cdots q_n \end{pmatrix}$ と書く。すなわち、

$$\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} p_1 \cdots p_n \\ q_1 \cdots q_n \end{pmatrix} = 1 \quad （(q_1, \cdots, q_n) \text{ が基準順列 } (p_1, \cdots, p_n) \text{ に関して偶順列のとき}）$$

$$\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} p_1 \cdots p_n \\ q_1 \cdots q_n \end{pmatrix} = -1 \quad （(q_1, \cdots, q_n) \text{ が基準順列 } (p_1, \cdots, p_n) \text{ に関して奇順列のとき}）$$

これが前節、行列式の定義式に現れた記号の意味である。

例 1　順列 (123) を基準に取り順列 (231) について考えると、考えるべき順序対は (2,3) (2,1); (3,1) である。このうち、正順序対は (2,3)、逆順序対は (2,1) (3,1) の 2 個であるから、順列 (231) は (123) に関して偶順列である。また (321) は奇順列である(正順序対 0 個、

逆順序対３個)。ゆえに $\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix}=1$、$\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix}=-1$。■

6.3　順列に互換を行うと偶奇性が反転する

与えられた順列において異なる位置にある 2 成分を交換し新しい順列をつくることを互換 transposition という。たとえば、順列 (231) に互換 $2\leftrightarrow 1$ を行うと、(132) が得られる。次の事実は重要である：

(1)　順列に互換を行うと偶奇性が反転する(偶順列は奇順列となり、奇順列は偶順列となる)

(2)　基準順列に偶数回の互換を行って得られる順列は偶順列、奇数回の互換を行って得られる順列は奇順列である。

(3)　任意順列 $(p_1,\cdots,p_n)$ から他の任意順列 $(q_1,\cdots,q_n)$ への移行に必要な互換数は必ず偶数か必ず奇数かのいずれかである（ある仕方では偶数回の互換、他の仕方では奇数回の互換が必要となるようなことは決して起きない)。

(4)　$\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1\cdots n\\ i_1\cdots i_n\end{pmatrix}=1$　$(1,\cdots,n)$ から $(i_1,\cdots,i_n)$ へ偶数回の互換を行って移行できるとき

$=-1$　$(1,\cdots,n)$ から $(i_1,\cdots,i_n)$ へ奇数回の互換を行って移行できるとき

証明　(1) 相隣る 2 成分の互換をまず考え、その結果を一般の場合に拡張するのが一番わかりやすい。基準順列を $(p_1,\cdots,p_n)$ とし、$(q_1,\cdots,q_n)$ を任意順列とする。相隣る 2 成分 q_k,q_{k+1} を互換すると、順序対（前節参照）の世界における変更は $(q_k,q_{k+1})\to(q_{k+1},q_k)$ のみである。これにより逆順序対の総数は 1 だけ変化する。ゆえに偶奇性は反転する。

つぎに q_k と q_l（$k<l$）の互換は相隣る 2 成分の奇数回の互換により実現できる。例えば、(2413) において互換 $2\leftrightarrow 3$ を行うには相隣る成分の互換を 5 回行えばよい：

$(2413)\to(4213)\to(4123)\to(4132)\to(4312)\to(3412)$

各回の互換により偶奇性は反転するから、奇数回の互換を行えば偶奇性は反転する。

(2) (1)より明らか。

(3) 任意順列 $(p_1,\cdots,p_n)$ から他の任意順列 $(q_1,\cdots,q_n)$ へ互換のみを用いて移行できることは明らかである。また、定義より、与えられた順列の偶奇性は基準となる順列が与えられれば一意的に定まる。これと(2)から(3)が出る。

(4)　符号数の定義と(2)から明らか。■

6.4　定義式による行列式計算例

定義式理解のため、行列式の値を定義式に従って計算してみよう。

(a)　1 次行列式：　$\det\left[a_{11}\right]=\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}a_{11}=a_{11}$

(b)　2 次行列式：　$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \sum_{(i_1,i_2)} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ i_1 & i_2 \end{pmatrix} a_{i_1,1}a_{i_2,2}$

$$= \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} a_{11}a_{22} + \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 12 \\ 21 \end{pmatrix} a_{21}a_{12} = (+1)a_{11}a_{22} + (-1)a_{21}a_{12} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

(c)　3 次行列式：　$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \sum_{(i_1,i_2,i_3)} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix} a_{i_1,1}a_{i_2,2}a_{i_3.3}$

$$= \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix} a_{11}a_{22}a_{33} + \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 123 \\ 132 \end{pmatrix} a_{11}a_{32}a_{23} + \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 123 \\ 231 \end{pmatrix} a_{21}a_{32}a_{13} + \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 123 \\ 213 \end{pmatrix} a_{21}a_{12}a_{33}$$
$$+ \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 123 \\ 312 \end{pmatrix} a_{31}a_{12}a_{23} + \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix} a_{31}a_{22}a_{13}$$

$$= (+1)a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)a_{11}a_{32}a_{23} + (+1)a_{21}a_{32}a_{13} + (-1)a_{21}a_{12}a_{33} + (+1)a_{31}a_{12}a_{23} + (-1)a_{31}a_{22}a_{13}$$

ここに、各項の符号数は一回の互換で符号数が反転することを使えば簡単にわかる。この式の簡易記憶法として次の図式が知られている：

正の符号をもつ項：$\begin{bmatrix} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} \\ & \searrow & & \searrow & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} \\ & \searrow & & \searrow & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} \end{bmatrix}$　（$+a_{11}a_{22}a_{33}$，$+a_{21}a_{32}a_{13}$，$+a_{31}a_{12}a_{23}$）

負の符号をもつ項：$\begin{bmatrix} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} \\ & \swarrow & & \swarrow & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} \\ & \swarrow & & \swarrow & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} \end{bmatrix}$　（$-a_{11}a_{32}a_{23}$，$-a_{21}a_{12}a_{33}$，$-a_{31}a_{22}a_{13}$）

応用例　$\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

(d)　三角行列式 $\det\begin{bmatrix} l_{11} & & \mathbf{0} \\ l_{21} & l_{22} & \\ \cdots\cdots & & \\ l_{n1} & \cdots\cdots & l_{nn} \end{bmatrix} = l_{11}l_{22}\cdots l_{nn}$、$\det\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12}\cdots u_{1n} \\ & u_{22}\cdots u_{2n} \\ & \cdots\cdots \\ \mathbf{0} & u_{nn} \end{bmatrix} = u_{11}u_{22}\cdots u_{nn}$

行列式は、各行各列から 1 個のみの成分を選んで掛け合わせたものに適当な符号をつけたものの総和であるから、最初の行列式に対しては、第 n 列から左へ順に見て行けば、定義式中の非零項は対角成分を掛け合わせたものだけである。 上三角行列の場合は、反対に第 1 列から右へ順に見ていく。

(e)　ブロック三角行列式

$$\det\begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} \end{bmatrix} = \det\mathbf{L}_{11}\cdot\det\mathbf{L}_{22}、\det\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_{22} \end{bmatrix} = \det\mathbf{U}_{11}\cdot\det\mathbf{U}_{22}$$

ここに対角ブロックは正方行列とする（次数は異なってよい）。

例によって導出法を示す。そこで

$$\mathbf{L} = \left[l_{ij}\right] = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & l_{34} & l_{35} \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} & l_{45} \\ l_{51} & l_{52} & l_{53} & l_{54} & l_{55} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} \end{bmatrix}$$

の場合を考える。まず、

$$\det\mathbf{L} = \sum_{(i_1,\cdots,i_5)} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 \end{pmatrix} l_{i_1,1}l_{i_2,2}l_{i_3,3}l_{i_4,4}l_{i_5,5}$$

だが、第 3 ～ 5 列から選択すべき非零成分は $\mathbf{L}_{22}$ 部内にあるものだけである。ゆえに、考慮すべき行番号 (i_3, i_4, i_5) は $\{3,4,5\}$ の順列だけである。すると (i_1, i_2) は自動的に $\{1,2\}$ の順列となる。しかもこのときは符号数の定義より

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 \end{pmatrix} = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ i_1 & i_2 \end{pmatrix}\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ i_3 & i_4 & i_5 \end{pmatrix}$$

が成立する。これを直前の式に使えば

$$\det\mathbf{L} = \sum_{(i_1,i_2)} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ i_1 & i_2 \end{pmatrix} l_{i_1,1}l_{i_2,2} \cdot \sum_{(i_3,i_4,i_5)} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ i_3 & i_4 & i_5 \end{pmatrix} l_{i_3,3}l_{i_4,4}l_{i_5,5} = \det\mathbf{L}_{11}\cdot\det\mathbf{L}_{22}$$

(f) 順列行列の行列式： $\det\left[\mathbf{e}_{j_1},\cdots,\mathbf{e}_{j_n}\right]=\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1\cdots n\\ j_1\cdots j_n\end{pmatrix}=\pm 1$（$\mathbf{e}_j$ は単位行列の第 j 列）■

n 次行列式の定義式は n 個の数の積 $n!$ 個の和を表す。しかし、次表からわかるように、階乗関数は急速に増大するから定義式から行列式の値を計算するのは、低次の場合や三角行列の場合などの特別な場合を除けば、実際的ではない。

n	$n!$
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
10	3.63×10^{6}
50	3.04×10^{64}
100	9.33×10^{157}

例えば、1 秒間に 1 兆回の浮動小数点演算可能な（teraflops）コンピュータを使って、50 次行列式を定義式から計算するには、天文学的時間を要する（試算されよ）。一般に、行列式の計算は後述する性質を利用して簡単化を行う。

6.5　ゼロ行またはゼロ列をもつ行列式の値は 0 に等しい

ゼロ行、またはゼロ列ももつ行列式は、定義式中の各項が少なくとも 1 個のゼロ因子を含むから、その値は 0 となる。

例： $\det\mathbf{0}=0$、$\det\begin{bmatrix}x & x & x\\ 0 & 0 & 0\\ x & x & x\end{bmatrix}=0$、$\det\begin{bmatrix}x & x & 0\\ x & x & 0\\ x & x & 0\end{bmatrix}=0$ ■

6.6　転置をとっても行列式の値は変らない： $\det\mathbf{A}^T=\det\mathbf{A}$

3 次行列の場合を例にとって証明する。定義式より

(1) $\det\mathbf{A}=\det\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}=\sum_{(p,q,r)}\mathrm{sgn}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ p & q & r\end{pmatrix}a_{p,1}a_{q,2}a_{r,3}$

(2)　$\det \mathbf{A}^T = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \sum_{(p,q,r)} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ p & q & r \end{pmatrix} a_{1,p}a_{2,q}a_{3,r}$

ここで(2)式中の任意項$\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ p & q & r \end{pmatrix} a_{1,p}a_{2,q}a_{3,r}$ において $a_{1,p}a_{2,q}a_{3,r}$ 中の因子の順序を入れかえて$a_{k,1}a_{l,2}a_{m,3}$の形に書き改めると（これは確かに可能)、符号数の性質から

(3)　$\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ p & q & r \end{pmatrix} a_{1,p}a_{2,q}a_{3,r} = \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} k & l & m \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} a_{k,1}a_{l,2}a_{m,3} = \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ k & l & m \end{pmatrix} a_{k,1}a_{l,2}a_{m,3}$

また、(p,q,r)が$\{1,2,3\}$のすべての順列をとれば、(k,l,m)も$\{1,2,3\}$のすべての順列をとることは明らかである。この事実と(3)を(2)式に使うと$\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$が得られる。一般の場合も証明法は全く同様である。　■

6.7　行列式は各行、各列について線形である（多重線形性)

行列式の値は転置をとっても不変であるから（前節)、｢行列式は各列について線形である」ことを示せば十分である。例として、第 1 列について線形であることを示す（他の列についても証明法は同じ)。すなわち、任意のスカラーc, c'、任意の$n\times 1$行列$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1', \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$に対して

$$\det\left[c\mathbf{a}_1 + c'\mathbf{a}_1', \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n\right] = c\det\left[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n\right] + c'\det\left[\mathbf{a}_1', \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n\right]$$

が成立することを示す。実際、行列式の定義式から

$$\det\left[c\mathbf{a}_1 + c'\mathbf{a}_1', \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n\right]$$

$$= \det\begin{bmatrix} ca_{11} + c'a_{11}' \cdots & a_{1n} \\ \vdots \ \ddots & \vdots \\ ca_{n1} + c'a_{n1}' \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (\mathbf{a}_1 = \left[a_{11}, \cdots, a_{n1}\right]^T, \mathbf{a}_1' = \left[a_{11}', \cdots, a_{n1}'\right]^T)$$

$$= \sum_{(i_1,\cdots,i_n)} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_n \end{pmatrix} (ca_{i_1,1} + c'a_{11}')a_{i_2,2}\cdots a_{i_n,n}$$

$$= c\sum_{(i_1,\cdots,i_n)} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_n \end{pmatrix} a_{i_1,1}a_{i_2,2}\cdots a_{i_n,n} + c'\sum_{(i_1,\cdots,i_n)} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_n \end{pmatrix} a_{i_1,1}'a_{i_2,2}\cdots a_{i_n,n}$$

$$= c\det\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n\right] + c'\det\left[\mathbf{a}_1',\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n\right] \ \blacksquare$$

例 1 $\det\begin{bmatrix} -a+2a' & b \\ -c+2c' & d \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + 2\cdot\det\begin{bmatrix} a' & b \\ c' & d \end{bmatrix}$

$$\det\begin{bmatrix} -a+2a' & b+b' \\ -c+2c' & d+d' \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + 2\cdot\det\begin{bmatrix} a' & b \\ c' & d \end{bmatrix} - \det\begin{bmatrix} a & b' \\ c & d' \end{bmatrix} + 2\cdot\det\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \blacksquare$$

例 2　$\mathbf{A}$ を n 次行列とすれば、$\det(k\mathbf{A}) = k^n \det\mathbf{A}$ （一般に $\det(k\mathbf{A}) \neq k\det\mathbf{A}$ に注意）。■

注意　一般に $\det(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \neq \det\mathbf{A} + \det\mathbf{B}$ 。例えば、$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$、$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ としてみよ。

6.8　相等しい 2 行また 2 列をもつ行列式の値は 0 に等しい

転置を取っても行列式の値は不変だから、列のみについて示せばよい。例として、3 次行列式において第 1 列＝第 2 列なら $\det\mathbf{A} = -\det\mathbf{A}$ （$\Leftrightarrow$ $\det\mathbf{A} = 0$）を示そう。実際、

$$\det\mathbf{A} = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \sum_{(p,q,r)} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ p & q & r \end{pmatrix} a_{p,1}a_{q,2}a_{r,3}$$

$$= \sum_{(q,p,r)} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ q & p & r \end{pmatrix} a_{q,1}a_{p,2}a_{r,3} \quad \text{（単なる文字使いの変更）}$$

$$= \sum_{(q,p,r)} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ q & p & r \end{pmatrix} a_{q,2}a_{p,1}a_{r,3} \quad \text{（}\because \text{第 1 列＝第 2 列ゆえ } a_{p,1} = a_{p,2}\text{、}a_{q,1} = a_{q,2}\text{）}$$

$$= -\sum_{(q,p,r)} \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ p & q & r \end{pmatrix} a_{p,1}a_{q,2}a_{r,3} \quad \left(\because \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ q & p & r \end{pmatrix} = -\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ p & q & r \end{pmatrix}\right)$$

$$= -\det\mathbf{A} \quad \blacksquare$$

例 1　$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = 0$　$\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} = 0$　念のため、6.4 節の公式を使って確認せよ。■

6.9　2 行または 2 列を互換すると行列式の符号が変わる

例として、3 次行列式の第 1 列と第 2 列を互換すれば符号が変わることを証明する。実際、

問題の行列の第 j 列を $\mathbf{a}_j$ （$j = 1,2,3$）と書けば、

$$0=\det\left[\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\right]$$（第 1 列＝第 2 列だから前節により行列式の値は 0）

$$=\det\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_3\right]+\det\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\right]+\det\left[\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_3\right]+\det\left[\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\right]$$（多重線形性、6.7 節）

$$=0+\det\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\right]+\det\left[\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_3\right]+0$$（再び前節の結果を適用）

これより、$\det\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\right]=-\det\left[\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_3\right]$ が得られる。■

例　$\det\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&8\end{bmatrix}=-\det\begin{bmatrix}7&8&8\\4&5&6\\1&2&3\end{bmatrix}$（第 1 行と第 3 行を互換）

$$=\det\begin{bmatrix}8&7&8\\5&4&6\\2&1&3\end{bmatrix}$$（第 1 列と第 2 列を互換）■

6.10　任意行（または列）のスカラー倍を他行（または他列）に加えても行列式の値は変わらない

例として、与えられた行列式の第 1 列に任意スカラー c を掛けて第 2 列に加えても行列式の値は変わらないことを示す。すなわち、$\det\left[\mathbf{a}_1,c\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\cdots,\mathbf{a}_n\right]=\det\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n\right]$ を示す。実際、

$$\det\left[\mathbf{a}_1,c\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\cdots,\mathbf{a}_n\right]=c\det\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_3\cdots,\mathbf{a}_n\right]+\det\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\cdots,\mathbf{a}_n\right]$$（多重線形性）

$$=0+\det\left[\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n\right]$$（∵6.8 節により、相等しい 2 行または 2 列をもつ行列式の値は 0）

この性質は行列式の簡単化に役立つ。

例 1　$\det\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&8\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&-6&-13\end{bmatrix}$（第 2 行－第 1 行 x 4→第 2 行、第 3 行－第 1 行 x 7→第 3 行）

$$=\det\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -6\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$ （第 3 行－第 2 行 x 2→第 3 行を実行）

$$=1\cdot(-3)\cdot(-1)=-3 \quad ■$$

例 2 $a^3+b^3+c^3-3abc=\det\begin{bmatrix}a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{bmatrix}$ （ 6.4 節例(c)）

$$=\det\begin{bmatrix}a+c+b & b+a+c & c+b+a\\ c & a & b\\ b & c & a\end{bmatrix}$$ （第 2,3 行を第 1 行に加える）

$$=(a+b+c)\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ c & a & b\\ b & c & a\end{bmatrix}$$ （多重線形性により、共通項を括り出す）

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ （当初の式の因数分解形が得られた！）■

6.11　積の行列式は行列式の積に等しい

任意の n 次行列 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ に対して積の公式 $\det\mathbf{AB}=\det\mathbf{A}\cdot\det\mathbf{B}$ が成り立つ。

証明　$n>1$ としてよい。まず、$\mathbf{A},\mathbf{B}$ を $\mathbf{A}=\left[\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n\right]$（$\mathbf{a}_j$ は第 j 列、$j=1,\cdots,n$）、$\mathbf{B}=\left[b_{ij}\right]$ と書けば、

$$\det\mathbf{AB}=\det\left[\mathbf{a}_1 b_{11}+\cdots+\mathbf{a}_n b_{n1},\cdots,\mathbf{a}_1 b_{1n}+\cdots+\mathbf{a}_n b_{nn}\right]$$

$$=\sum\det\left[\mathbf{a}_{k_1},\cdots,\mathbf{a}_{k_n}\right]\cdot b_{k_1,1}\cdots b_{k_n,n}$$ （$k_1,\cdots$ は $1,\cdots,n$ のすべての値をとる）

右辺の行列式中、相等しい 2 列をもつものの値は 0 だから、和は $\{1,\cdots,n\}$ の順列についてだけとればよく、この場合各 $\det\left[\mathbf{a}_{k_1},\cdots,\mathbf{a}_{k_n}\right]$ は適当回の列互換を行えば $(\pm1)\cdot\det\left[\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n\right]$ 形に変形できる。これを使って上式を整頓すれば、$\det(\mathbf{AB})=(\det\mathbf{A})\cdot\alpha$ 型の関係が得られる。ここに α はその由来から $\mathbf{A}$ に依存しないスカラーを表す。ゆえに、この式で $\mathbf{A}=\mathbf{I}$ とすれば、$\alpha=\det\mathbf{B}$ が得られる。■

例 1 $\mathbf{A}$ を $m\times n$ 行列、$\mathbf{B}$ を $n\times m$ 行列とする。$m>n$ なら $\det\mathbf{AB}=0$ である。実際、

$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{B}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}$の行列式を取れば（$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\end{bmatrix}$は $\mathbf{A}$ の右に $m-n(>0)$ 個のゼロ列を付加した m 次行列）、本節の結果より $\det\mathbf{AB}=\det\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\det\begin{bmatrix}\mathbf{B}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}=0\cdot 0=0$。■

例 2　(a)　$\mathbf{A}^{-1}$ が存在すれば、$\det\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix}=\det\mathbf{A}\cdot\det(\mathbf{D}-\mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})$

(b)　$\mathbf{D}^{-1}$ が存在すれば、$\det\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix}=\det(\mathbf{A}-\mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C})\cdot\det\mathbf{D}$

(c)　$\det(\mathbf{I}-\mathbf{ab}^T)=1-\mathbf{b}^T\mathbf{a}$　（$\mathbf{a},\mathbf{b}:n\times 1$）

ここに $\mathbf{A},\mathbf{D}$ は一般に次数の異なる正方行列を表す。実際、

$$\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ -\mathbf{CA}^{-1} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{0} & \mathbf{D}-\mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{I} & -\mathbf{BD}^{-1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}-\mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{0}\\ \mathbf{C} & \mathbf{D}\end{bmatrix}$$

（ガウスの消去法）の行列式をとれば(a)(b)が出る。

(c)　(a)(b)において $\mathbf{A}=\mathbf{I},\ \mathbf{B}=\mathbf{a},\ \mathbf{C}=\mathbf{b}^T,\ \mathbf{D}=[1]$ とすればよい。■

例 3　$\mathbf{A}$ を $m\times n$ 行列、$\mathbf{B}$ を $n\times m$ 行列、λ を任意のスカラーとすれば

$(-\lambda)^n\det(\mathbf{AB}-\lambda\mathbf{I}_m)=(-\lambda)^m\det(\mathbf{BA}-\lambda\mathbf{I}_n)$　（$\mathbf{I}_m$ は m 次単位行列）

とくに、$m=n$ の場合は $\det(\mathbf{AB}-\lambda\mathbf{I})=\det(\mathbf{BA}-\lambda\mathbf{I})$ が成り立つ。

証明　次の計算を確認し、行列式をとる：

$$\begin{bmatrix}\mathbf{AB}-\lambda\mathbf{I}_m & \mathbf{0}\\ \mathbf{B} & -\lambda\mathbf{I}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_m & \mathbf{A}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{I}_m & \mathbf{A}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\lambda\mathbf{I}_m & \mathbf{0}\\ \mathbf{B} & \mathbf{BA}-\lambda\mathbf{I}_n\end{bmatrix}\quad ■$$

例 4　$\mathbf{A}$ を n 次行列、$\mathbf{V}$ を n 次可逆行列とすれば、$\det(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{AV})=\det\mathbf{A}$ が成り立つ。

これは積の公式よりすぐに出る。実際、

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{AV})&=\det\mathbf{V}^{-1}\det\mathbf{A}\det\mathbf{V}=\det\mathbf{V}^{-1}\det\mathbf{V}\det\mathbf{A}=\det(\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V})\det\mathbf{A}\\&=\det\mathbf{I}\det\mathbf{A}=1\cdot\det\mathbf{A}=\det\mathbf{A}\quad ■\end{aligned}$$

例 5　$\mathbf{A}$ を可逆行列とすれば $\det\mathbf{A}^{-1}=(\det\mathbf{A})^{-1}$。

証明　$\mathbf{AA}^{-1}=\mathbf{I}$ の行列式をとれば、$\det\mathbf{A}\cdot\det\mathbf{A}^{-1}=1$ が出る。ところでこれは $\mathbf{A}^{-1}$ が存在すれば、$\det\mathbf{A}\neq 0$ であることを示す。■

6.12　可逆性と行列式の非零性は同値である

n 次行列 $\mathbf{A}$ が逆行列をもつための必要十分条件は $\det \mathbf{A} \neq 0$ である

証明：（必要性）前節例 5。（十分性） $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n]$ （$\mathbf{a}_1$ は第 1 列、・・・を表す）が可逆でなければ、 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ を満たす $n \times 1$ 行列 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ が存在する。これは $\mathbf{A}$ の列が一次従属であることを示す。ゆえにどれかの列を他の列の一次結合として表現できる。これを

$\det \mathbf{A} = \det[\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n]$ に代入し、行列式の多重線形性と「相等しい 2 行また 2 列をもつ行列式の値は 0」を使えば、$\det \mathbf{A} = 0$ が結論される。■

注意　6.14 節において逆行列の公式を示す。

例 1　6.4 節(d)により

$$\det \begin{bmatrix} l_{11} & & \mathbf{0} \\ l_{21} & l_{22} & \\ \cdots\cdots & & \\ l_{n1} & \cdots\cdots & l_{nn} \end{bmatrix} = l_{11} l_{22} \cdots l_{nn} \qquad \det \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \cdots u_{1n} \\ & u_{22} \cdots u_{2n} \\ & \cdots\cdots \\ \mathbf{0} & \quad u_{nn} \end{bmatrix} = u_{11} u_{22} \cdots u_{nn}$$

ゆえに、三角行列が可逆であるための必要十分条件は対角成分がすべて非零であること。■

例 2　6.4(e)により

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} \end{bmatrix} = \det \mathbf{L}_{11} \cdot \det \mathbf{L}_{22}、\qquad \det \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_{22} \end{bmatrix} = \det \mathbf{U}_{11} \cdot \det \mathbf{U}_{22}$$

ゆえに、ブロック三角行列が可逆であるための必要十分条件は各対角ブロックガ可逆であることである。■

6.13　特定の行または列による展開

与えられた n 次行列式 $\det \mathbf{A} = \det \begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}$ に対して、次の展開公式が成立する：

(1)　第 k 行による展開　$\det \mathbf{A} = a_{k1} A_{k1} + \cdots + a_{kn} A_{kn} = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} A_{kl}$

(2)　第 l 列による展開　$\det \mathbf{A} = a_{1l} A_{1l} + \cdots + a_{nl} A_{nl} = \sum_{k=1}^{n} a_{kl} A_{kl}$

ここに A_{kl} は次式によって定義される $\mathbf{A}$ の第 (k, l) 余因子 cofactor を表す：

$$(3)\quad A_{kl}=(-1)^{k+l}\det\begin{bmatrix} a_{11}\ \cdots & a_{1,l-1} & a_{1,l+1}\ \cdots & a_{1n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_{k-1,1}\cdots & a_{k-1,l-1} & a_{k-1,l+1}\cdots & a_{k-1,n} \\ a_{k+1,1}\cdots & a_{k+1,l-1} & a_{k+1,l+1}\cdots & a_{k+1,n} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1}\ \ \cdots & a_{n,l-1} & a_{n,l+1}\ \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\quad (k,l=1,\cdots,n)$$

$=(-1)^{k+l}$ （$\det\mathbf{A}$ の第 k 行、第 l 列を消し去った $n-1$ 次行列式）

符号分布 $(-1)^{k+l}\,(=(-1)^{|k-l|})$ はチェス盤模様 $\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ & \cdots\cdots\cdots & & \end{bmatrix}$ をなす。

証明は後述。以上の展開公式は、n 次行列式の計算を $n-1$ 次行列式の計算に落している点が値打ちである。応用上はなるべくゼロ成分の多い行または列によって展開するのが賢明である。例を示す。

例１　２次、３次行列式の第１列による展開は

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=a_{11}\det\left[a_{22}\right]-a_{21}\det\left[a_{12}\right]=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}=a_{11}\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}-a_{21}\det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}+a_{31}\det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$$

また、第２行による展開は

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=-a_{21}\det\left[a_{12}\right]+a_{22}\det\left[a_{11}\right]=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}=-a_{21}\det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}+a_{22}\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33}\end{bmatrix}-a_{23}\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32}\end{bmatrix}$$

いずれもこれまでに出した公式に還元するのは当然である。■

例２　三角行列に第１行または第１列による展開を繰り返し適用すれば既知の公式が出る：

$$\det\begin{bmatrix} l_{11} & & \mathbf{0} \\ l_{21} & l_{22} & \\ \cdots\cdots & & \\ l_{n1} & \cdots\cdots & l_{nn} \end{bmatrix} = l_{11}l_{22}\cdots l_{nn} \qquad \det\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12}\cdots u_{1n} \\ & u_{22}\cdots u_{2n} \\ & \cdots\cdots \\ \mathbf{0} & & u_{nn} \end{bmatrix} = u_{11}u_{22}\cdots u_{nn} \quad \blacksquare$$

証明　展開公式(1)(2)を証明する。行列式の定義式を変形していく方法が一番直接的である。から、まず、$\det\mathbf{A}$ の第 1 列による展開を示す。定義より

$$\det\mathbf{A} = \det\begin{bmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn} \end{bmatrix} = \sum_{(i_1,\cdots,i_n)} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1\cdots n \\ i_1\cdots i_n \end{pmatrix} a_{i_1,1}\cdots a_{i_n,n}$$

$$= \sum_k a_{k1} \sum_{(i_2,\cdots,i_n)} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2\cdots n \\ k & i_2\cdots i_n \end{pmatrix} a_{i_2,2}\cdots a_{i_n,n}$$

ここで

$$\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2\cdots n \\ k & i_2\cdots i_n \end{pmatrix} = (-1)^{k-1}\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1\cdots k-1 & k & k+1\cdots n \\ i_2\cdots i_{k-1} & k & i_{k+1}\cdots i_n \end{pmatrix} = (-1)^{k-1}\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1\cdots k-1 & k+1\cdots n \\ i_2\cdots i_{k-1} & i_{k+1}\cdots i_n \end{pmatrix}$$

ゆえ、

$$\det\mathbf{A} = \sum_k (-1)^{k-1} a_{k1} \sum_{(i_2,\cdots,i_n)} \mathrm{sgn}\begin{pmatrix} 1\cdots k-1 & k+1\cdots n \\ i_2\cdots i_{k-1} & i_{k+1}\cdots i_n \end{pmatrix} a_{i_2,2}\cdots a_{i_n,n} \quad (k \notin \{i_2,\cdots,i_n\})$$

$$= \sum_k (-1)^{k-1} a_{k1}A_{k1} \; (= \sum_k (-1)^{k+1} a_{k1}A_{k1})$$

となる。これは $\mathbf{A}$ の第 1 列による展開に他ならない。

第 l 列（$l = 1,\cdots,n$）による展開公式は、$\mathbf{A}$ に $l-1$ 回の相隣る 2 列の互換を行い、第 l 列を第 1 列に移動させた後、第 1 列による展開を行えば得られる。すなわち、

$$\det\mathbf{A} = (-1)^{l-1}\sum_k (-1)^{k+1} a_{kl}A_{kl} = \sum_k (-1)^{k+l} a_{kl}A_{kl}$$

行による展開公式は $\det\mathbf{A}^T$ に列による展開を適用すればよい。■

6.14　逆行列の公式

行列 $\begin{bmatrix} A_{11}\cdots A_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ A_{n1}\cdots A_{nn} \end{bmatrix}^T \equiv Adj\mathbf{A}$（転置演算に注意！）を与えられた n 次行列 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn} \end{bmatrix}$ の

を随伴行列(classical) adjoint matrix という。ここに A_{kl} は前節で定義された (k,l) 余因子を表す（$k,l=1,\cdots,n$）。すると

(1)　$\mathbf{A}\cdot adj\mathbf{A}=(\det\mathbf{A})\cdot\mathbf{I}$

が成り立つ。ゆえに、$\det\mathbf{A}\neq 0$ なら

(2)　$\mathbf{A}^{-1}=\dfrac{1}{\det\mathbf{A}}\begin{bmatrix} A_{11}\cdots A_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots \\ A_{n1}\cdots A_{nn}\end{bmatrix}^T=\dfrac{1}{\det\mathbf{A}}adj\mathbf{A}$

証明　行または列による展開公式（前節）による。(2)は(1)から直接出るから(1)のみを示す。左辺の行列積 $\mathbf{A}Adj\mathbf{A}\equiv\mathbf{B}$ の (i,j) 成分を計算すると、

(3)　$b_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=a_{i1}A_{j1}+\cdots+a_{in}A_{jn}$　　（$i,j=1,\cdots,n$）

$i=j$ の場合は前節の結果により、右辺は $\det\mathbf{A}$ の第 i 行による展開を表すゆえ、

$b_{ii}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}=\det\mathbf{A}$ （$i=1,\cdots,n$）となり、$i\neq j$ なら、(3)の右辺は $\mathbf{A}$ の第 j 行を第 i 行で置き換えた行列式（異なる位置にある 2 列が等しい行列式）の、第 j 行による展開と見なせるからその値は 0 である。すなわち、$b_{ij}=0,\ i\neq j$。以上から $\mathbf{B}=(\det\mathbf{A})\mathbf{I}$。■

注意　6.12 節で「$\mathbf{A}^{-1}$ が存在しない $\Rightarrow$ $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ が非零解をもつ $\Rightarrow$ $\det\mathbf{A}=0$」が示された。本節では後者の対偶「$\det\mathbf{A}\neq 0\Rightarrow$ $\mathbf{A}^{-1}$ が存在する」が示された。

6.15　クラーメルの公式

$\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]=\left[\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n\right]$ を既知 n 次可逆行列（$\mathbf{a}_j$ は第 j 列、$j=1,\cdots,n$）、$\mathbf{b}=\left[b_1,\cdots,b_n\right]^T$ を既知 $n\times 1$ 行列とすれば行列方程式 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ の解 $\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\equiv\left[x_1,\cdots,x_n\right]^T$ の各成分は次式で与えられる：

(1)　$x_i=\det\left[\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_{i-1},\mathbf{b},\mathbf{a}_{i+1},\cdots,\mathbf{a}_n\right]/\det\mathbf{A},\ i=1,\cdots,n$

ここに、分子は $\det\mathbf{A}$ の第 i 列を $\mathbf{b}$ で置き換えた行列式を表す。これをクラーメルの公式 Cramer’s rule という。

証明　前節の「逆行列の公式」と 6.13 節「行または列による展開公式」を使うのがもっとも簡単である。逆行列の公式により

$$\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}=\frac{1}{\det\mathbf{A}}\begin{bmatrix} A_{11}\cdots A_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ A_{n1}\cdots A_{nn}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n\end{bmatrix}=\frac{1}{\det\mathbf{A}}\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n A_{k1}b_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n A_{kn}b_k\end{bmatrix}$$

右辺最後の行列の各成分は列による展開公式により

$$\sum_{k=1}^n A_{k1}b_k=\det\left[\mathbf{b},\mathbf{a}_2,\cdots\cdots\mathbf{a}_n\right],\cdots\cdots,\sum_{k=1}^n A_{kn}b_k=\det\left[\mathbf{a}_1,,\mathbf{a}_{n-1},\mathbf{b}\right]\quad\blacksquare$$

例 1　行列方程式

$$\mathbf{Ax}\equiv\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e \\ f\end{bmatrix}\equiv\mathbf{b}\ (\det\mathbf{A}=ad-bc\neq 0)$$

の解はクラーメルの公式により

$$x=\det\begin{bmatrix} e & b \\ f & d\end{bmatrix}/\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}=\frac{ed-bf}{ad-bc},\quad y=\det\begin{bmatrix} a & e \\ c & f\end{bmatrix}/\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}=\frac{af-ec}{ad-bc}\quad\blacksquare$$

例 2　3 次行列方程式

$$\mathbf{Ax}\equiv\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3\end{bmatrix}\equiv\mathbf{b}\ (\det\mathbf{A}\neq 0)$$

の解はクラーメルの公式により

$$x_1=\det\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}/\det\mathbf{A},\quad x_2=\det\begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{bmatrix}/\det\mathbf{A},$$

$$x_3=\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{bmatrix}/\det\mathbf{A}\quad\blacksquare$$

注意　クラーメルの公式は各成分が行列式の比として陽に表されているので、一見、並列数値計算に向いているかのように見えるが、そのまま使えば、$n=2$ の場合においてさえ桁落ちの起こる可能性があるので、使うべきではない。

6.16　ラプラス展開

「特定の 1 行または 1 列による展開」(6.13 節) は以下に示すように「特定の複数行または複数列によるラプラス展開」に拡張できる。すなわち、n 次行列式 $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]$ において、第

$p_1<\cdots<p_k$ 行、第 $q_1<\cdots<q_k$ 列（$1\le k<n$）の交わる位置にある成分から構成される k 次行列を

$$\mathbf{A}_{q_1,\cdots,q_k}^{p_1,\cdots,p_k}\equiv\begin{bmatrix} a_{p_1,q_1}\cdots a_{p_1,q_k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{p_k,q_1}\cdots a_{p_k,q_k}\end{bmatrix}$$ で表すと、次のラプラス展開 Laplace expansion が成立する：

(1)　$\det\mathbf{A}=\sum_{p_1<\cdots<p_k}(-1)^{p_1+\cdots p_k+q_1+\cdots+q_k}\det\mathbf{A}_{q_1,\cdots,q_k}^{p_1,\cdots,p_k}\det\mathbf{A}_{q_{k+1},\cdots,q_n}^{p_{k+1},\cdots,p_n}$　（第 $q_1,\cdots,q_k$ 列による展開）

(2)　$\det\mathbf{A}=\sum_{q_1<\cdots<q_k}(-1)^{p_1+\cdots p_k+q_1+\cdots+q_k}\det\mathbf{A}_{q_1,\cdots,q_k}^{p_1,\cdots,p_k}\det\mathbf{A}_{q_{k+1},\cdots,q_n}^{p_{k+1},\cdots,p_n}$　（第 $p_1,\cdots,p_k$ 行による展開）

ここに右辺の和は可能なすべての場合についてとるものとし、$(p_1,\cdots,p_n),(q_1,\cdots,q_n)$ は $\{1,\cdots,n\}$ の順列を表す。

証明　(2)は(1)を $\mathbf{A}^T$ に適用すれば得られるから、(1)のみを示す。$n=4$、第 1,3 列による展開、すなわち、$k=2,\ q_1=1,\ q_2=3$（したがって $q_3=2,\ q_4=4$）の場合、を例にとって証明法を説明しよう。この場合、証明すべき式は次式である：

(3)　$\det\mathbf{A}=\sum_{p_1<p_2}(-1)^{p_1+p_2+q_1+q_2}\det\mathbf{A}_{q_1,q_2}^{p_1,p_2}\det\mathbf{A}_{q_3,q_4}^{p_3,p_4}$

証明は未定係数法によるのが早い。すなわち、$q_1=1,\ q_2=3$ を考慮し、4 次行列 $\mathbf{A}=\left[a_{ij}\right]$ の行列式をまず第 1 列によって展開する。すると 3 次行列式の一次結合を得る。ついで各 3 次行列式を元の行列式 $\det\mathbf{A}$ の第 3 列によって展開する。結果を整理すれば

(4)　$\det\mathbf{A}=\sum_{p_3<p_4}f(\mathbf{A}_{1,3}^{p_1,p_2})\det\mathbf{A}_{2,4}^{p_3,p_4}$

の形をとる。ここに右辺の和は $1\le p_3<p_4\le 4$ を満たすようなすべての p_3,p_4 についてとり、記号 $f(\mathbf{A}_{1,3}^{p_1,p_2})$ は小行列 $\mathbf{A}_{1,3}^{p_1,p_2}$ のみによって定まるスカラーを表す（$p_1<p_2$ は $1,\cdots,4$ から $p_3<p_4$ を除いたもの）。

未知量 $f(\mathbf{A}_{1,3}^{p_1,p_2})$ を定めるため、(4)式において特定の項 $\mathbf{A}_{1,3}^{p_1,p_2}$ 、$\mathbf{A}_{2,4}^{p_3,p_4}$ に含まれる成分はそのまま、それ以外の成分を 0 とおくと、(2)式中の他の項はすべて 0 となる。ゆえに

(5)　$f(\mathbf{A}_{1,3}^{p_1,p_2})\det\mathbf{A}_{2,4}^{p_3,p_4}=\det\mathbf{A}$　（ただし $a_{ij}\notin\mathbf{A}_{1,3}^{p_1,p_2},\mathbf{A}_{2,4}^{p_3,p_4}$ なら $a_{ij}=0$ としている）

たとえば、$p_1=2,\ p_2=3,\ p_3=1,\ p_4=4$ なら

(6)　$f(\mathbf{A}_{1,3}^{2,3})\det\mathbf{A}_{2,4}^{1,4} = \det\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{12} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{42} & a_{44} \end{bmatrix}$

（最後の等号は「第 1 行⇔第 2 行、第 2 行⇔第 3 行、第 2 列⇔第 3 列」という互換の結果）

$$= -\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}\det\begin{bmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{42} & a_{44} \end{bmatrix} = -\det\mathbf{A}_{1,3}^{2,3}\det\mathbf{A}_{2,4}^{1,4} = (-1)^{2+3+1+3}\det\mathbf{A}_{1,3}^{2,3}\det\mathbf{A}_{2,4}^{1,4}$$

一般の場合も同様の計算を行う。すなわち、(3)式右辺の行列式において

第 p_1 行→第 p_1-1 行→…→第 1 行（p_1-1 回の互換）、第 p_2 行→第 p_2-1 行→…→第 2 行（p_2-2 回の互換）、

第 q_1 列→第 q_1-1 列→…→第 1 列（q_1-1 回の互換）、第 q_2 列→第 q_2-1 列→…→第 2 列（q_2-2 回の互換）

を実行すると、

(7)　$f(\mathbf{A}_{1,3}^{p_1,p_2})\det\mathbf{A}_{2,4}^{p_3,p_4}$

$$= (-1)^{p_1-1+p_2-2+q_1-1+q_2-2}\det\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{q_1,q_2}^{p_1,p_2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{q_3,q_4}^{p_3,p_4} \end{bmatrix} = (-1)^{p_1+p_2+q_1+q_2}\det\mathbf{A}_{q_1,q_2}^{p_1,p_2}\det\mathbf{A}_{q_3,q_4}^{p_3,p_4}$$

が得られる。これを(4)式に代入したものが証明すべき式(3)に他ならない。

復習すると、ラプラス展開はこれまでの証明から次のように書ける：

$$\det\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} x & 0 & x & 0 \\ x & 0 & x & 0 \\ 0 & y & 0 & y \\ 0 & y & 0 & y \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} x & 0 & x & 0 \\ 0 & y & 0 & y \\ x & 0 & x & 0 \\ 0 & y & 0 & y \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} x & 0 & x & 0 \\ 0 & y & 0 & y \\ 0 & y & 0 & y \\ x & 0 & x & 0 \end{bmatrix}$$
$$+ \det\begin{bmatrix} 0 & y & 0 & y \\ x & 0 & x & 0 \\ x & 0 & x & 0 \\ 0 & y & 0 & y \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 0 & y & 0 & y \\ x & 0 & x & 0 \\ 0 & y & 0 & y \\ x & 0 & x & 0 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 0 & 0 & y & y \\ 0 & 0 & y & y \\ x & x & 0 & 0 \\ x & x & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ここに右辺は、左辺第 1,3 列から任意に 2 行を選び、第 2,4 列からそれ以外の 2 行を選び、選らんだ成分以外の成分を 0 とおいて得られる行列式の総和を表す。そして、例えば

$$\det\begin{bmatrix} 0 & y & 0 & y \\ x & 0 & x & 0 \\ x & 0 & x & 0 \\ 0 & y & 0 & y \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} x & x & 0 & 0 \\ x & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & y \\ 0 & 0 & y & y \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix}\det\begin{bmatrix} y & y \\ y & y \end{bmatrix}$$

のように、右辺各項に行互換または列互換を行いブロック対角行列式に変形し、元の式に代入したものがラプラス展開(3)に他ならない。■

例 1　$\det\begin{bmatrix}\mathbf{L}_{11} & \mathbf{0}\\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22}\end{bmatrix}=\det\mathbf{L}_{11}\det\mathbf{L}_{22}$　　$\det\begin{bmatrix}\mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{12}\\ \mathbf{0} & \mathbf{U}_{22}\end{bmatrix}=\det\mathbf{U}_{11}\det\mathbf{U}_{22}$

いずれも既知事項であるが、ラプラス展開から一目でわかる。■

6.17　ビネ・コーシー展開

ラプラス展開（前節）は単一の行列式の展開公式であるが、ビネ・コーシー展開は $\mathbf{A}:m\times n,\mathbf{B}:n\times m$ の積 $\mathbf{AB}$ の展開公式である。ただし $m\le n$ とする。とくに $m=n$ なら公式 $\det\mathbf{AB}=\det\mathbf{A}\cdot\det\mathbf{B}$ に還元する。他方、$m>n$ なら、$\det\mathbf{AB}=0$（6.11 節例 1)。

次の展開公式をビネ・コーシー展開 Binet-Cauchy Expansion という：$m\le n$、

$\mathbf{A}=\left[\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_n\right]:m\times n$、$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{b}^1\\ \vdots\\ \mathbf{b}^m\end{bmatrix}:n\times m$ とすれば（$\mathbf{a}_j$ は $\mathbf{A}$ の第 j 列、$\mathbf{b}^i$ は $\mathbf{B}$ の第 i 行)、次

(1)　$\det\mathbf{AB}=\sum_{j_1<\cdots<j_m}\det\left[\mathbf{a}_{j_1},\cdots,\mathbf{a}_{j_m}\right]\cdot\det\begin{bmatrix}\mathbf{b}^{j_1}\\ \vdots\\ \mathbf{b}^{j_m}\end{bmatrix}$（右辺は m 次行列式の積)

が成立する。ここに和は関係 $1\le j_1<\cdots<j_m\le n$ を満たす、すべての $j_1,\cdots,j_m$ についてとるものとする。

例 1　$2=m<n=3$ の場合

(2)　$\det\mathbf{AB}\equiv\det\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\right]\begin{bmatrix}\mathbf{b}^1\\ \mathbf{b}^2\\ \mathbf{b}^3\end{bmatrix}\equiv\det(\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\\ b_{31} & b_{32}\end{bmatrix})$

$$=\det\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2\right]\det\begin{bmatrix}\mathbf{b}^1\\ \mathbf{b}^2\end{bmatrix}+\det\left[\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_3\right]\det\begin{bmatrix}\mathbf{b}^1\\ \mathbf{b}^3\end{bmatrix}+\det\left[\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\right]\det\begin{bmatrix}\mathbf{b}^2\\ \mathbf{b}^3\end{bmatrix}$$

$$=\det\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\det\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{bmatrix}\det\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{31} & b_{32}\end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}\det\begin{bmatrix}b_{21} & b_{22}\\ b_{31} & b_{32}\end{bmatrix}$$ ■

証明　上の例で説明する。未定係数法がわかりやすい。

(3)　$$\det \mathbf{AB} = \det(\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix})$$

$$= \det\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 b_{11} + \mathbf{a}_2 b_{21} + \mathbf{a}_3 b_{31} & \mathbf{a}_1 b_{12} + \mathbf{a}_2 b_{22} + \mathbf{a}_3 b_{32} \end{bmatrix}$$

右辺を行列式の性質を使って整理すると

(4)　$$\det \mathbf{AB} = \beta_{12} \det\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{bmatrix} + \beta_{13} \det\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} + \beta_{23} \det\begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}$$

ここに、係数β_{ij}は行列$\mathbf{B}$のみによって定まり、$\mathbf{A}$とは全く無関係な数を表す。β_{ij}の決め方の例としてβ_{13}を考える。(4)で$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$, $\mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$とすれば、(3)より

(5)　$$\det \mathbf{AB} = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{b}^1 \\ \mathbf{b}^2 \\ \mathbf{b}^3 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \mathbf{b}^1 \\ \mathbf{b}^3 \end{bmatrix}$$

$$= \beta_{12} \det\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \beta_{13} \det \mathbf{I}_2 + \beta_{23} \det\begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} = 0 + \beta_{13} \cdot 1 + 0 = \beta_{13} \quad \therefore\ \beta_{13} = \det\begin{bmatrix} \mathbf{b}^1 \\ \mathbf{b}^3 \end{bmatrix}$$

同様にして$\beta_{12} = \det\begin{bmatrix} \mathbf{b}^1 \\ \mathbf{b}^2 \end{bmatrix}$, $\beta_{23} = \det\begin{bmatrix} \mathbf{b}^2 \\ \mathbf{b}^3 \end{bmatrix}$が得られる。これらを(4)に代入すればビネ・コーシー展開(2)が得られる。■

例 2　$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$とすれば、ビネ・コーシー展開により、

$$\det \mathbf{AA}^T = \det\begin{bmatrix} a^2 + b^2 + c^2 & ad + be + cf \\ ad + be + cf & d^2 + e^2 + f^2 \end{bmatrix}$$

$$= (\det\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix})^2 + (\det\begin{bmatrix} a & c \\ d & f \end{bmatrix})^2 + (\det\begin{bmatrix} b & c \\ e & f \end{bmatrix})^2 \quad ■$$

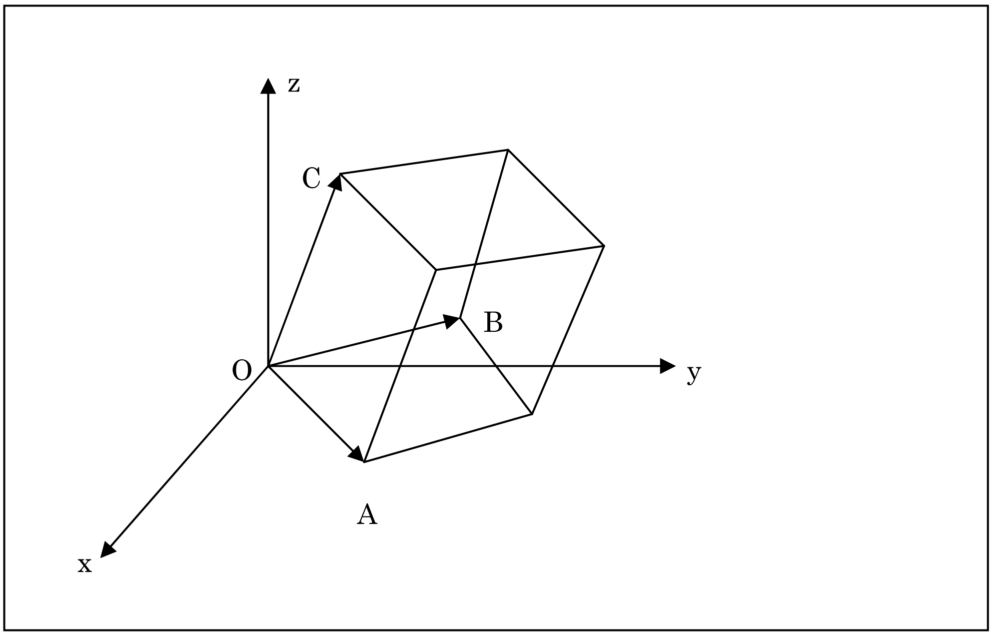
6.18　3 次行列式は平行 6 面体の符号付体積を表す

通常の 3 次元空間内に右手系直交座標系$O - xyz$を導入する。ここに、右手系とは、x軸、y軸、z軸の正の向きがこの順で、右手の親指、人差し指、中指が指す向きに対応することを

いう。そして、空間内の任意点 $P(x,y,z)$ 、矢線ベクトル $\overrightarrow{OP}$ 、列ベクトル $[x,y,z]^T$ をすべて同一視することにする。また、任意の 3 次（実）直交行列 $\mathbf{Q}=[\mathbf{q}_1\ \mathbf{q}_2\ \mathbf{q}_3]$ をとれば、$\{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3\}$ は $\mathbf{q}_i{}^T\mathbf{q}_j=\delta_{ij}$（$i,j=1,2,3$）を満たすから、直交行列と $\{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3\}$ を単位ベクトルとする直交座標系は 1 対 1 対応をなす。次の事実が成り立つ：

(I) 直交行列 $\mathbf{Q}=[\mathbf{q}_1\ \mathbf{q}_2\ \mathbf{q}_3]$ の列 $\{\mathbf{q}_1,\ \mathbf{q}_2,\ \mathbf{q}_3\}$ が右手系直交座標系をなす $\Leftrightarrow \det\mathbf{Q}=1$

(II) 空間内に右手系直交座標系 $O-xyz$ を導入し、$A(a_x,a_y,a_z)$ 、$B(b_x,b_y,b_z)$ 、$C(c_x,c_y,c_z)$ を空間内の 3 点とすれば、$\det\begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{bmatrix}\equiv\det[\mathbf{a}\ \ \mathbf{b}\ \ \mathbf{c}]$ は矢線ベクトル $\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}$ によって定まる平行 6 面体の符号付体積を表す（下図参照）。



ここに体積の符号は、点 O,A,B を通る平面内において原点を中心に $\overrightarrow{OA}$ より $\overrightarrow{OB}$ への回転（$\angle AOB$ は 180° 以下にとる）が正となる側に（＝回転により右ねじが進む側に）$\overrightarrow{OC}$ が存在するときに正と規約する。

証明　(I) $\{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3\}$ が右手系直交座標系を表すならそれは原点を固定点とする回転により連

続的に$\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$に移行できるはずである。$\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}=\mathbf{I}$ （$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}\mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{q}_3\end{bmatrix}$）の行列式をとると

$(\det\mathbf{Q})^2=1$が得られるゆえ、$\det\mathbf{Q}=\pm1$。$\det\mathbf{Q}$は連続的に$\det\mathbf{I}=1$に移行するから、結局解析学の「中間値の定理」により$\det\mathbf{Q}=-1$の可能性は排除される。逆に$\det\mathbf{Q}=1$なら、やはり回転により$\mathbf{q}_1\to\mathbf{e}_1$、$\mathbf{q}_2\to\mathbf{e}_2$とした後の$\mathbf{q}_3$の最終位置は$\pm\mathbf{e}_3$であるが、行列式の連続性より$\mathbf{q}_3\to\mathbf{e}_3$でなければならない。これは$\{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3\}$は最初から右手系直交座標系をなすことを示す。

(II) 任意の右手系直交座標系$\{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3\}$をとり、これから見た$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$の座標を

$A(a_x',a_y',a_z')$、・・とすれば、座標変換を表す式は

$$\begin{bmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{q}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_x' & b_x' & c_x' \\ a_y' & b_y' & c_y' \\ a_z' & b_z' & c_z'\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\mathbf{a}' & \mathbf{b}' & \mathbf{c}'\end{bmatrix}$$

である。行列式をとると、$\det\mathbf{Q}=1$ゆえ、$\det\begin{bmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c}\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}\mathbf{a}' & \mathbf{b}' & \mathbf{c}'\end{bmatrix}$となる。ゆえに行列式の

値は右手系直交座標系によらない。そこで、$\overrightarrow{OA}$を$\mathbf{q}_1$軸に、そして$\overrightarrow{OA}$を$\overrightarrow{OB}$方向へ 90 度回転

させた位置に$\mathbf{q}_2$軸を取り、$\mathbf{q}_3$軸は$\{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3\}$が右手系直交座標系をなすようにとる。すると

点A,B,Cの新座標は$\begin{bmatrix}a_x' \\ 0 \\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}b_x' \\ b_y' \\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}c_x' \\ c_y' \\ c_z'\end{bmatrix}$の形のはずである。すなわち、

$\begin{bmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{q}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_x' & b_x' & c_x' \\ 0 & b_y' & c_y' \\ 0 & 0 & c_z'\end{bmatrix}$の関係が成り立つはずである。両辺の行列式を取ると、

$\det\mathbf{Q}=1$ゆえ、$\det\begin{bmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c}\end{bmatrix}=a_x'b_y'c_z'$が出る。この値は今考えている平行六面体の（符号付）

体積を表すことを確認できる。■

ここで示した事実を考慮すると、既知事実「$\mathbf{A}^{-1}$の存在$\Leftrightarrow\det\mathbf{A}\neq0$」は「$\mathbf{A}^{-1}$が存在$\Leftrightarrow$ $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$が$\mathbf{A}$の列の一次結合として書ける$\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$の列によって決定される平行 6 面体の体積$\neq0$」となる。これは幾何学的直感から納得できるであろう。

6.19　ベクトル積

行列式が幾何学の基本量を表す例をもう 1 例挙げる。$\mathbf{a}=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{bmatrix}^T$、$\mathbf{b}=\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & b_3\end{bmatrix}^T$ を与えられたベクトルとするとき

(1)　$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\det\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{bmatrix}=\mathbf{e}_1\det\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{bmatrix}+\mathbf{e}_2\det\begin{bmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{bmatrix}+\mathbf{e}_3\det\begin{bmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{3\times 1}$$

を $\mathbf{a},\mathbf{b}$ の<u>ベクトル積</u> vector product という。ここに右辺は形式的な行列式を第 1 行で展開したものを表し、$\mathbf{e}_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T,\mathbf{e}_2=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T,\mathbf{e}_3=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$ は通常の単位ベクトルを表す（ベクトル解析の本では $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ を $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ で表すことが多い)。次の事実が成り立つ：

(I)　ベクトル積は（右手系）直交座標系の取り方にはよらない：すなわち、

$\begin{bmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b}\end{bmatrix}=\mathbf{Q}\begin{bmatrix}\mathbf{a}' & \mathbf{b}'\end{bmatrix}$（$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}',\mathbf{b}'\in\mathbf{R}^{3\times 1}$）、$\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}=\mathbf{I}$（直交性）、$\det\mathbf{Q}=1$（右手系）

とすれば、$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\det\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}\mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{q}_3\\ a_1' & a_2' & a_3'\\ b_1' & b_2' & b_3'\end{bmatrix}=\mathbf{a}'\times\mathbf{b}'$ が成立する、

(II)　$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ は $\mathbf{a},\mathbf{b}$ によって定まる平行 4 辺形の面積に等しい長さをもち、$\mathbf{a},\mathbf{b}$ によって定まる平面に垂直、かつ $\mathbf{a}$ を $\mathbf{b}$ に向かって回転させたとき（回転角が 180 度以下になるような回転を選ぶ)、右ねじの進む方向を向くベクトルを表す。

証明　(I) 最初に形式的な証明を示す。与えられた条件を形式的に使って

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\det\begin{bmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{bmatrix}=\det(\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{q}_3\end{bmatrix}\mathbf{Q}^T\\ \begin{bmatrix}a_1' & a_2' & a_3'\\ b_1' & b_2' & b_3'\end{bmatrix}\mathbf{Q}^T\end{bmatrix}=\det(\begin{bmatrix}\mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{q}_3\\ a_1' & a_2' & a_3'\\ b_1' & b_2' & b_3'\end{bmatrix}\mathbf{Q}^T)$$

$$=\det\begin{bmatrix}\mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{q}_3\\ a_1' & a_2' & a_3'\\ b_1' & b_2' & b_3'\end{bmatrix}\cdot\det\mathbf{Q}^T=\det\begin{bmatrix}\mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{q}_3\\ a_1' & a_2' & a_3'\\ b_1' & b_2' & b_3'\end{bmatrix}\quad(\because\det\mathbf{Q}^T=\det\mathbf{Q}=1)$$

$$=\mathbf{a}'\times\mathbf{b}'$$

これが実際に正しいことを見るには、ベクトル積の定義を想起しつつ計算の経過を追えばよい（詳細略)。

(II) (I)によりベクトル積は特定の右手系直交座標系によらない。そこで、$\mathbf{a}$ を新 x 軸、$\mathbf{a},\mathbf{b}$ によって定まる平面内で $\mathbf{a}$ を $\mathbf{b}$ に向かって 90 度回転させたものを新 y 軸（回転の向きは $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 間の角度が 180 度以下になるようにする)、この回転に伴う右ねじの進む向きに新 z 軸をとる。この右

Copyright 再履修線形代数研究会

手系直交座標系の単位ベクトルを $\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\mathbf{q}_3$ とすれば、$\mathbf{a},\mathbf{b}$ の新座標は

$\mathbf{a}'=[a_1'\ 0\ 0]^T$, $\mathbf{b}'=[b_1'\ b_2'\ 0]^T$ であるから、ベクトル積は

$$\mathbf{a}'\times\mathbf{b}'=\det\begin{bmatrix}\mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \mathbf{q}_3\\ a_1' & 0 & 0\\ b_1' & b_2' & 0\end{bmatrix}=\mathbf{q}_1 0+\mathbf{q}_2 0+\mathbf{q}_3\det\begin{bmatrix}a_1' & 0\\ b_1' & b_2'\end{bmatrix}=\mathbf{q}_3 a_1' b_2'$$

＝（$\mathbf{a}',\mathbf{b}'$ によって定まる平行四辺形の面積（≥ 0））$\mathbf{q}_3$ ■

例 1 $\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3=\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_2$。また、$\mathbf{a}\times\mathbf{a}=\mathbf{0}$ 、$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$、

$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}$、$\mathbf{a}^T(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\det[\mathbf{a}\ \ \mathbf{b}\ \ \mathbf{c}]$。これらはベクトル積の公式を利用すれば

直ちに出る。■

最後にひとこと　行列式は理論的考察用に広く使われるので、線形代数の必修基礎知識の一部を形成する。とくに「行列式の非零性とその行列の可逆性は同値である」ことは忘れてはならない。これは「3 次行列式の値はその 3 列によって決定される平行 6 面体の符号付体積を表す」という幾何学的解釈からも類推できる。クラーメルの公式は、各未知数をデータの行列式の比で表して点が面白いが、数値的に不安定であるため、数値計算には適さない。

腕試し問題

問題 6.1　$\det\mathbf{A}\neq 0$ なら、行を適当に並べ替えることにより対角成分がすべて非零となるようにできることを示せ。また、列を適当に並べ替えても同じことができることを示せ。

（略解　$\det\mathbf{A}\neq 0$ なら行列式の定義式中のすべての項が 0 ではありえない。そこで

$a_{p,1}a_{q,2}\cdots a_{r,1}\neq 0$ とすれば、第 p 行→第 1 行、第 q 行→第 2 行、・・とすればよい。■）

問題 6.2　次の行列式の値を計算せよ：

(a) $\det\begin{bmatrix}5&4&1&1\\4&5&1&1\\1&1&4&2\\1&1&2&4\end{bmatrix}$　(b) $\det\begin{bmatrix}-73&78&24\\92&66&25\\-80&37&10\end{bmatrix}$

(c) $\det\begin{bmatrix}6&-3&4&1\\4&2&4&0\\4&-2&3&1\\4&2&3&1\end{bmatrix}$　(d) $\det\begin{bmatrix}2&2&2&2\\3&3&2&2\\2&0&4&2\\1&0&0&5\end{bmatrix}$

（答　(a) 100 (b) 1　(c) 16 (d) -24 ■）

問題 6.3　$\mathbf{A}^T=-\mathbf{A}$ を満たす行列 $\mathbf{A}$ を交代対称行列 skew-symmetric matrix という。交代対称行列の対角成分はすべて 0 でなければならない。

(a)　奇数次交代対称行列の行列式は 0 に等しいことを示せ。

例： $\det[0]=0,\ \det\begin{bmatrix}0 & a & b\\ -a & 0 & c\\ -b & -c & 0\end{bmatrix}=0,\cdots$

(b)　2 次交代対称行列、4 次交代対称行列に対する次の展開公式を示せ：

$$\det\begin{bmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{bmatrix}=a^2、\quad \det\begin{bmatrix}0 & a & b & c\\ -a & 0 & d & e\\ -b & -d & 0 & f\\ -c & -e & -f & 0\end{bmatrix}=(af-be+cd)^2$$

（略証　前者は明らか。後者に対しては次の計算を行う：

$$\mathbf{A}\equiv\begin{bmatrix}0 & a & b & c\\ -a & 0 & d & e\\ -b & -d & 0 & f\\ -c & -e & -f & 0\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}\mathbf{X} & \mathbf{Y}\\ -\mathbf{Y}^T & \mathbf{Z}\end{bmatrix}\quad（\mathbf{X}=\begin{bmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{bmatrix},\ \mathbf{Y}=\begin{bmatrix}b & c\\ d & e\end{bmatrix},\ \mathbf{Z}=\begin{bmatrix}0 & f\\ -f & 0\end{bmatrix}）$$

と書き、ガウスの消去法を適用する： $\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{Y}^T\mathbf{X}^{-1} & \mathbf{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{X} & \mathbf{Y}\\ -\mathbf{Y}^T & \mathbf{Z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{X} & \mathbf{Y}\\ \mathbf{0} & \mathbf{Y}^T\mathbf{X}^{-1}\mathbf{Y}+\mathbf{Z}\end{bmatrix}$

ここに $\mathbf{X}^{-1}$ の存在を仮定している。行列式を取ると、

$$1\cdot\det\begin{bmatrix}\mathbf{X} & \mathbf{Y}\\ -\mathbf{Y}^T & \mathbf{Z}\end{bmatrix}\cdot 1=\det\mathbf{X}\cdot\det(\mathbf{Y}^T\mathbf{X}^{-1}\mathbf{Y}+\mathbf{Z})$$

直接計算により

$$\det\mathbf{X}=a^2,\quad \mathbf{Y}^T\mathbf{X}^{-1}\mathbf{Y}+\mathbf{Z}=(1/a)(af-be+cd)\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

これらを一つ前の式に代入すれば証明すべき関係が得られる。この式は $a\neq 0$ の仮定の下に得られたが、$a,b,\cdots$ に関する恒等式だから $a=0$ の場合にも成立する。あるいは $a\to 0$ の極限をとってもよい。■）

問題 6.4 前問の方法を拡張し、偶数次（$2n$ 次）交代対称行列 $\mathbf{A}$ の行列式は必ず $\det\mathbf{A}=F^2$ の形に書けることを示せ。ここに F は $\mathbf{A}$ の成分に関する n 次（同次）多項式を表し、Pfaffian と呼ばれる。

（略証　数学的帰納法による。前問により、問題の主張は $n=1,2$ の場合は真である。そこで $2n$ 次交代対称行列に対して主張が真であるとし、$2(n+1)$ 次交代対称行列を

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{X} & \mathbf{Y}\\ -\mathbf{Y}^T & \mathbf{Z}\end{bmatrix},\ \mathbf{X}^T=-\mathbf{X}:2n\times 2n,\ \mathbf{Y}:2n\times 2,\ \mathbf{Z}^T=-\mathbf{Z}:2\times 2$$

に分割する。そして $\mathbf{X}^{-1}$ の存在を仮定し、前問と同じ計算を行うと、

$$\det\mathbf{A}=\det\begin{bmatrix}\mathbf{X} & \mathbf{Y}\\ -\mathbf{Y}^T & \mathbf{Z}\end{bmatrix}=\det\mathbf{X}\cdot\det(\mathbf{Y}^T\mathbf{X}^{-1}\mathbf{Y}+\mathbf{Z})$$

が出る。ここに右辺最後の行列は 2 次交代対称行列であるから、$\mathbf{Y}^T\mathbf{X}^{-1}\mathbf{Y}+\mathbf{Z}=\begin{bmatrix}0 & G\\ -G & 0\end{bmatrix}$ の形をもつ。ここに、G は逆行列の公式より $\mathbf{A}$ の成分に関する分数式を表す。これと帰納法の仮定 $\det\mathbf{X}=F^2$ を一つ前の式に使うと、$\det\mathbf{A}=F^2G^2=(FG)^2$ が出る。これは分数式間の恒等式を表す。ところが、左辺は $\mathbf{A}$ の成分に関する $2(n+1)$ 次多項式）ゆえ、FG は $n+1$次多項式でなければならず、結局上式は $\mathbf{X}^{-1}$ の存在とは無関係に成立する恒等式でなければならない。■）

問題 6.5 行列式 $\det\mathbf{A}=\det\begin{bmatrix}a_{11}\cdots a_{1n}\\ \cdots\cdots\\ a_{n1}\cdots a_{nn}\end{bmatrix}=\sum_{(i_1,\cdots,i_n)}\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}1\cdots n\\ i_1\cdots i_n\end{pmatrix}a_{i_1,1}\cdots a_{i_n,n}$ 中の (k,l) 余因子

$$A_{kl}=(-1)^{|k-l|}\det\begin{bmatrix}a_{11}\ \cdots\ a_{1,l-1} & a_{1,l+1}\ \cdots\ a_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{k-1,1}\cdots a_{k-1,l-1} & a_{k-1,l+1}\cdots a_{k-1,n}\\ a_{k+1,1}\cdots a_{k+1,l-1} & a_{k+1,l+1}\cdots a_{k+1,n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}\ \cdots a_{n,l-1} & a_{n,l+1}\ \cdots\ a_{nn}\end{bmatrix}=\det\mathbf{A}\text{ から第}k\text{ 行、第}l\text{ 列を削除したもの}$$

は、$\det\mathbf{A}$ において第 l 列を第 k 単位ベクトル $\mathbf{e}_k$ で置き換えた行列式に等しいことを示せ。

（略証　第 k 行または第 l 列による展開公式を使えば直ちに出る。■）

問題 6.6　線形変換の行列式　いま、$\mathbf{X}$ を任意の $n(\geq 1)$ 次元ベクトル空間、$\mathbf{A}$ を $\mathbf{X}$ からそれ自身への線形変換、$\{\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n\}$ を $\mathbf{X}$ の任意基底とし、

$$\mathbf{A}\left[\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n\right]=\left[\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n\right]\begin{bmatrix}a_{11}\cdots a_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}\cdots a_{nn}\end{bmatrix}\ \text{（すなわち、}\mathbf{A}\mathbf{x}_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\mathbf{x}_i\ \ (j=1,\cdots,n)\text{）}$$

$$\equiv\left[\mathbf{x}_1\cdots\mathbf{x}_n\right]\mathbf{A}_{\{\mathbf{x}_1,\cdots\}}$$

とする。ここに $\mathbf{A}_{\{\mathbf{x}_1,\cdots\}}$ は基底 $\{\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n\}$ に関する線形変換 $\mathbf{A}$ の行列表現である（レッスン 2)。

このとき $\det \mathbf{A}_{\{\mathbf{x}_1,\cdots\}}$ は基底の選び方に無関係な一定値を表すことを示せ。この値を線形変換 $\mathbf{A}$ の行列式という。

（略証　$\mathbf{X}$ の任意基底 $\{\mathbf{x}_1,\cdots\mathbf{x}_n\}$、$\{\mathbf{y}_1,\cdots,\mathbf{y}_n\}$ に対して $\det \mathbf{A}_{\{\mathbf{y}_1,\cdots\}} = \det \mathbf{A}_{\{\mathbf{x}_1,\cdots\}}$ を示せばよい。

基底の定義より両基底の間には可逆行列 $\mathbf{B}$ を介して $\left[\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_n\right] = \left[\mathbf{y}_1,\cdots,\mathbf{y}_n\right]\mathbf{B}$ 型の関係式が成立するはずである。これより、基底 $\{\mathbf{y}_1,\cdots\}$ に関する $\mathbf{A}$ の行列表現は $\mathbf{A}_{\{\mathbf{y}_1,\cdots\}} = \mathbf{B}\mathbf{A}_{\{\mathbf{x}_1,\cdots\}}\mathbf{B}^{-1}$ で与えられることがわかる。両辺の行列式をとれば証明すべき式が得られる。■）

問題 6.7　$\mathbf{A},\mathbf{B}$ を任意の n 次行列、λ を任意のスカラーとすれば次式が成立することを示せ：

(1) $\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}+\mathbf{B} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}-\mathbf{B} \end{bmatrix}$ （$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \mathbf{I}$ に注意）

(2) $\det\begin{bmatrix} \mathbf{A}-\lambda\mathbf{I} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A}-\lambda\mathbf{I} \end{bmatrix} = \det(\mathbf{A}+\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I})\cdot\det(\mathbf{A}-\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I})$

（略解　(1)は単純な計算問題。(2)は(1)から $\lambda\mathbf{I}$ を引き行列式をとればよい。■）

問題 6.8　$\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix} = a^3+b^3+c^3-3abc$ を利用し、次式を証明せよ：

$$(a^3+b^3+c^3-3abc)(x^3+y^3+z^3-3xyz) = X^3+Y^3+Z^3-3XYZ$$

ここに、$X = ax+bz+cy,\ Y = ay+bx+cz,\ Z = az+by+cx$。

（略証　積の公式 $\det\mathbf{AB} = \det\mathbf{A}\det\mathbf{B}$ の利用で解決する。■）

問題 6.9　クラーメルの公式を利用して次の連立一次方程式を解け：

(a) $\begin{matrix} x+y=3 \\ x-y=-1 \end{matrix}$　(b) $\begin{matrix} x+2y-z=6 \\ 3x+z=2 \\ y+2z=0 \end{matrix}$　(c) $\begin{matrix} x+y+z=0 \\ x-y+z=2 \\ x-y-z=2 \end{matrix}$

（答：(a) $x=1, y=2$ (b) $x=1, y=2, z=-1$ (c) $x=1, y=-1, z=0$ ）

問題 6.10　逆行列の公式を用いて次の行列の逆行列を計算せよ：

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$　(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1+2i & 2+10i \\ 1+i & 3i & -5+14i \\ 1+i & 5i & -8+20i \end{bmatrix}$ $(i^2=-1)$

（答：(a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 10+i & -2+6i & -3-2i \\ 9-3i & 8i & -3-2i \\ -2+2i & -1-2i & 1 \end{bmatrix}$）

問題 6.11　平面の方程式

3 次元空間内の通常の直交座標系 $O-xyz$ に関する平面の方程式は $ax+by+cz+d=0$（$a^2+b^2+c^2>0$）によって与えられる。これは既知とする。すると、同一直線上にない相異なる 3 点 $(x_i, y_i, z_i)\,(i=1,2,3)$ によって定まる平面の方程式は $\det\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix}=0$ によって与えられることを示せ。

（略証　上式を展開すると $ax+by+cz+d=0$ の形となる。$a^2+b^2+c^2>0$ を示す。まず、

$$\mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \\ x_1-x_3 & y_1-y_3 & z_1-z_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{bmatrix}$$

。ここで

$\mathbf{B} \equiv \begin{bmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 & z_1-z_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ を考えると、与えられた 3 点は同一直線上のないから、$\mathbf{B}$ の 2 行は一次独立である。ゆえに $2=rank(\mathbf{B})=rank(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)$。$(0\neq)\det\mathbf{B}\mathbf{B}^T$ をビネ・コーシーの定理によって展開すると、

$$0\neq\det\mathbf{B}\mathbf{B}^T=(\det\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix})^2+(\det\begin{bmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{bmatrix})^2+(\det\begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{bmatrix})^2$$

。これは $a^2+b^2+c^2>0$ を示す。

ゆえに、与えられた方程式は確かに平面の方程式を表す。次に、$x=x_i, y=y_i, z=z_i\ (i=1,2,3)$ を与えられた式に代入すれば相等しい 2 行が発生して左辺の値は 0 となるから、平面は確かに与えられた 3 点を通る。■）

問題 6.12　行列式の微分法

$$\det\mathbf{A}=\det\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=\sum_{(i_1,\cdots,i_n)}\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_n \end{pmatrix} a_{i_1,1}\cdots a_{i_n,n}$$

において各成分a_{ij}を実または複素変数tの微分可能な関数とすれば、

$$\frac{d}{dt}\det\mathbf{A}=\det\begin{bmatrix} a_{11}' & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}' & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}' & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}' & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}' & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}' & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}+\cdots+\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}' \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}' \end{bmatrix}$$

$$=\det\begin{bmatrix} a_{11}' & a_{12}' & \cdots & a_{1n}' \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}+\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}' & a_{22}' & \cdots & a_{2n}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}+\cdots+\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}' & a_{n2}' & \cdots & a_{nn}' \end{bmatrix}$$

が成り立つことを示せ（$'=\dfrac{d}{dt}$）。

（略証　前半は定義式をそのまま微分すればよい。後半は一般公式$\det\mathbf{A}=\det\mathbf{A}^T$に前半を適用し、その結果にこの公式を再利用すればよい。■）