レッスン 9　ジョルダン分解　Part I

シュール分解（レッスン 7）は、与えられた行列 $\mathbf{A}$ をユニタリ相似変換の範囲内で三角行列にまで簡単化できることを保証する。すなわち、$\mathbf{A}=\mathbf{Q}^{*}\mathbf{T}\mathbf{Q}$（$\mathbf{Q}$ ＝ユニタリ行列、$\mathbf{T}$ ＝上三角行列）型の分解が可能である。これに対して、本レッスンの主題であるジョルダン分解は、相似変換の範囲を一般の可逆行列によるものにまで拡大すれば、$\mathbf{A}$ をジョルダン標準形と呼ばれる特殊なブロック対角行列（各対角ブロックは特殊な上 2 重対角行列）にまで簡単化できることを保証する。すなわち、$\mathbf{A}=\mathbf{V}\mathbf{J}\mathbf{V}^{-1}$（$\mathbf{V}$ ＝可逆行列、$\mathbf{J}$ ＝ジョルダン標準形）型の分解が可能である。そして、これは新しい応用を約束する（次レッスンで示す）。

ジョルダン分解は線形代数における最高峰の定理とされるだけあって、述べ方は簡単だが、証明はそれだけ長くなるため、入門書では敬遠され勝ちである。しかし、分解の構造を調べ、何を証明すべきかを最初に抑えれば、証明の道筋はきわめて明快となる。実際、分解の構造を調べると、$\mathbf{J}$ は一般固有空間の次元に関する簡単な代数式によって一意的に定まること、$\mathbf{V}$ の列は、一般固有ベクトルからなる複数本の鎖列（ジョルダン鎖列）からなること、従ってジョルダン分解を構築するには、このような鎖列を（一次独立性を保ちつつ）必要な数だけ構築することと同値であること、が明らかになる。実際の構築には、通常の一次独立性を拡張した「部分空間からの独立性」の概念を必要とする。構築手続きの実際は、後ほど一歩一歩丁寧に示す。

「ジョルダン分解」の発見者は、「ジョルダン曲線定理」（複素解析の有名な定理）の発見者としても知られている、フランス人数学者 Camille Jordan (1838-1922)である。

9.1　ジョルダン分解 の一般形

最初にジョルダン分解の一般形をのべる。与えられた $\mathbf{A}\in\mathbf{C}^{n\times n}$ に対して可逆行列 $\mathbf{V}$ を適当に選ぶと、

$$(1)\quad \mathbf{A}=\mathbf{V}\mathbf{J}\mathbf{V}^{-1}、\mathbf{J}=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & & \lambda_1 \end{bmatrix} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \begin{bmatrix} \lambda_r & 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & & \lambda_r \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

型の分解が成立する。ここに、$\mathbf{J}$ をジョルダン標準形 Jordan canonical (or normal) form、各

対角ブロックをジョルダンブロック Jordan block or cell という。また、$\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ は $\mathbf{A}$ の固有値を表し、すべて相異なるとは限らない。各ジョルダンブロックが 1×1 なら、ジョルダン標準形は $\mathbf{J}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \mathbf{0}\\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n\end{bmatrix}$ ＝対角行列、となり、$\mathbf{A}$ は（相似）対角化可能 diagonalizable であるという。以上をジョルダン分解 Jordan decomposition という。

スペース節約のため、(1)式の $\mathbf{J}$ を

$$\mathbf{J}=diag\{\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & & \mathbf{0}\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ \mathbf{0} & & & \lambda_1\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}\lambda_r & 1 & & \mathbf{0}\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ \mathbf{0} & & & \lambda_r\end{bmatrix}\}$$ （$diag$ は diagonal の略）

と書くこともある。

例１ ジョルダン標準形の例

$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$（対角行列、ジョルダンブロック数＝2、固有値：$0,0$）

$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$（対角行列、ジョルダンブロック数＝2、固有値：1,1）

$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$（ジョルダンブロック数＝1、固有値：1,1）

$\begin{bmatrix}1+i & 1 & 0\\ 0 & 1+i & \\ 0 & 0 & 1-i\end{bmatrix}$（ジョルダンブロック数＝2、固有値：$1+i,1+i,1-i$）■

例２ $\mathbf{A}$ は対角化可能$\leftrightarrow$ $\mathbf{A}$ が n 個の一次独立な固有ベクトルをもつ。

証明（$\rightarrow$）$\mathbf{A}=\mathbf{VJV}^{-1}$（$\mathbf{J}$ は対角行列）を $\mathbf{AV}=\mathbf{VJ}$ と書き直し、対応する列を等置すれば、$\mathbf{Av}_j=\mathbf{v}_j\lambda_j,\ j=1,\cdots,n$。ここに、固有ベクトルの集合 $\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n\}$ は可逆行列の列全体の集合であるから一次独立である。（$\leftarrow$）上の証明を逆行すればよい。■

n 次行列 $\mathbf{A}$ の相異なる固有値を $\lambda_1,\cdots,\lambda_p$ とする（ジョルダン分解(1)中の $\lambda_1,\cdots$ の意味と違っているので注意！）。今後、λ_j に対応する k 階一般固有空間、すなわち、$(\mathbf{A}-\lambda_j\mathbf{I})^k$ の零空間、を $N_k(\lambda_j)$ で表すことにする（$j=1,\cdots,p$ 、$k=0,1,2,\cdots$ 、$N_0(\lambda_j)\equiv\{\mathbf{0}\}$）。すると、特

定の固有値λ_jに対応するジョルダンブロックの分布は$\dim N_k(\lambda_j)$（$k=0,1,2,\cdots$、）の値のみによって確定する。実際、次の公式が成立する：

(2)　固有値λ_jに対応するk次ジョルダンブロックの総数

$$=2\dim N_k(\lambda_j)-\dim N_{k-1}(\lambda_j)-\dim N_{k+1}(\lambda_j)\geq 0 \quad (k=1,2,\cdots)$$

(3)　固有値λ_jに対応する、ジョルダンブロックの総数$=\dim N_1(\lambda_j)$

＝固有値λ_jに対応する一次独立な固有ベクトルの総数

一般固有空間$N_k(\lambda_j)$は、$\mathbf{A}$のみによって一意的に定まるから、上式(2)は、ジョルダン標準形はジョルダンブロックの配列順序を無視すれば、$\mathbf{A}$のみによって一意的に定まり、特定の$\mathbf{V}$の選び方には無関係であることを意味する。

例3　ある 5 次行列$\mathbf{A}$の相異なる固有値は$\lambda_1=1,\ \lambda_2=1+i$、また

$$\dim N_1(\lambda_1)=2<\dim N_2(\lambda_1)=\dim N_3(\lambda_1)=\cdots=3,$$
$$\dim N_1(\lambda_2)=1<\dim N_2(\lambda_2)=\dim N_3(\lambda_2)=\cdots=2$$

であるという。$\mathbf{A}$のジョルダン標準形$\mathbf{J}$を求めよ。まず、以下の表を作る：

j	λ_j	k	$\dim N_k(\lambda_j)$	$2\dim N_k(\lambda_j)-\dim N_{k-1}(\lambda_j)-\dim N_{k+1}(\lambda_j)$
1	1	0	0	
		1	2	1 (= 2 x 2 – 0 – 3)
		2	3	1
		3	3	0
		4	3	0
2	1+i	0	0	
		1	1	0 (= 2 x 1 – 0 – 2)
		2	2	1
		3	2	0
		4	2	0

すると、公式(2)により

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix} 1 & & & & \mathbf{0} \\ & 1 & 1 & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & & 1+i & 1 \\ \mathbf{0} & & & 0 & 1+i \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

この節で述べた事項の証明は後述する。

9.2　ジョルダン分解の構造

この節では、ジョルダン分解の構造を詳しく調べ、前節の公式(2)(3)を証明する。記号の意味については前節参照。また、一般固有ベクトルおよび鎖列の定義についてはレッスン7、7.1節参照。

例によって説明するのがわかりやすい。そこで例として、次のジョルダン分解を考える：

$$\mathbf{A}=\mathbf{V}\mathbf{J}\mathbf{V}^{-1}=\mathbf{V}\begin{bmatrix} [\lambda_1] & & & \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1\end{bmatrix} & & \\ & & \begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1\end{bmatrix} & \\ \mathbf{0} & & & \begin{bmatrix}\lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2\end{bmatrix} \end{bmatrix}\mathbf{V}^{-1} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{1,1} & & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{J}_{1,2} & & \\ & & \mathbf{J}_{1,3} & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{J}_{2,1} \end{bmatrix}$$

（$\lambda_1 \neq \lambda_2$）

まず、$\mathbf{V}=\left[\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_6 \ \mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \mathbf{w}_3\right]$と書き、上式を$\mathbf{AV}=\mathbf{VJ}$と書き直して、対応する列を等置すれば、次の関係が得られる：

$\mathbf{Av}_1=\mathbf{v}_1\lambda_1$、

$\mathbf{Av}_2=\mathbf{v}_2\lambda_1$、$\mathbf{Av}_3=\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3\lambda_1$

$\mathbf{Av}_4=\mathbf{v}_4\lambda_1$、$\mathbf{Av}_5=\mathbf{v}_4+\mathbf{v}_5\lambda_1$、$\mathbf{Av}_6=\mathbf{v}_5+\mathbf{v}_6\lambda_1$

$\mathbf{Aw}_1=\mathbf{w}_1\lambda_2$、$\mathbf{Aw}_2=\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_2\lambda_2$、$\mathbf{Aw}_3=\mathbf{w}_2+\mathbf{w}_3\lambda_2$

簡単のため、$\mathbf{B}_1 \equiv \mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I},\ \mathbf{B}_2 \equiv \mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}$と記せば、以上は次のように書き直せる：

$\mathbf{B}_1\mathbf{v}_1=\mathbf{0}$、

$\mathbf{B}_1^{\,2}\mathbf{v}_3=\mathbf{0}$、$\mathbf{v}_2=\mathbf{B}_1\mathbf{v}_3$、

$\mathbf{B}_1^{\,3}\mathbf{v}_6=\mathbf{0}$、$\mathbf{v}_4=\mathbf{B}_1^{\,2}\mathbf{v}_6$、$\mathbf{v}_5=\mathbf{B}_1\mathbf{v}_6$

$\mathbf{B}_2{}^3\mathbf{w}_3=\mathbf{0}$、$\mathbf{w}_1=\mathbf{B}_2{}^2\mathbf{w}_3$、$\mathbf{w}_2=\mathbf{B}_2\mathbf{w}_3$

以上の計算から得られる結論をまとめると表１のようになる：

表１

固有値	対応する一般固有ベクトル	階数
	$\mathbf{v}_1 \quad (\mathbf{B}_1\mathbf{v}_1=\mathbf{0})$	1
	$\mathbf{v}_2=\mathbf{B}_1\mathbf{v}_3 \quad (\mathbf{B}_1{}^2\mathbf{v}_3=\mathbf{0})$	1
λ_1	$\mathbf{v}_3$	2
	$\mathbf{v}_4=\mathbf{B}_1{}^2\mathbf{v}_6 \quad (\mathbf{B}_1{}^3\mathbf{v}_6=\mathbf{0})$	1
	$\mathbf{v}_5=\mathbf{B}_1\mathbf{v}_6$	2
	$\mathbf{v}_6$	3
	$\mathbf{w}_1=\mathbf{B}_2{}^2\mathbf{w}_3 \quad (\mathbf{B}_2{}^3\mathbf{w}_3=\mathbf{0})$	1
λ_2	$\mathbf{w}_2=\mathbf{B}_2\mathbf{w}_3$	2
	$\mathbf{w}_3$	3

表１から次の結論が得られる：

(I)　$C_{1,1}\equiv\{\mathbf{v}_1\}$（$\mathbf{v}_1\neq\mathbf{0}$、$\mathbf{B}_1\mathbf{v}_1=\mathbf{0}$）、$C_{1,2}\equiv\{\mathbf{v}_2=\mathbf{B}\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_3\}$（$\mathbf{B}_1\mathbf{v}_3\neq\mathbf{0}$、$\mathbf{B}_1{}^2\mathbf{v}_3=\mathbf{0}$）、

$C_{1,3}\equiv\{\mathbf{v}_4=\mathbf{B}_1{}^2\mathbf{v}_6,\mathbf{v}_5=\mathbf{B}_1\mathbf{v}_6,\mathbf{v}_6\}$（$\mathbf{B}_1{}^2\mathbf{v}_6\neq\mathbf{0}$、$\mathbf{B}_1{}^3\mathbf{v}_6=\mathbf{0}$）、

$C_{2,1}\equiv\{\mathbf{B}_2{}^2\mathbf{w}_3=\mathbf{w}_1,\mathbf{B}_2\mathbf{w}_3=\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3\}$（$\mathbf{B}_2{}^2\mathbf{w}_3\neq\mathbf{0}$、$\mathbf{B}_2{}^3\mathbf{w}_3=\mathbf{0}$）

はすべて鎖列を表す。それぞれ、特定のジョルダンブロックと１対１対応し、合併集合は全空間（この場合は$\mathbf{C}^{9\times1}$）の基底となっている。このような性質をもつ鎖列をジョルダン鎖列 Jordan chain と呼ぶことにする。

(II)　各鎖列に含まれるベクトルの総数をその鎖列の次数 order と呼ぶことにすれば、鎖列 $C_{1,1},C_{1,2},C_{1,3},C_{2,1}$ 中の k 次以上の鎖列は k 階一般固有ベクトルを１個かつ１個のみ含む（$k=1,2,\cdots$）。実際、$\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_6$ は、固有値 λ_1 に対応する、階数 1、1、2、1、2、3 の一般固

有ベクトルを表し、$\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ は、固有値 λ_2 に対応する、階数 1、2、3 の一般固有ベクトルを表す。

(III)　$N_k(\lambda_j) = span$ ｛λ_j に対応する、鎖列 $C_{1,1}, C_{1,2}, C_{1,3}, C_{2,1}$ 中の k 階以下の一般固有ベクトルの集合｝（$k = 1, 2, \cdots$）

詳しくいえば

$N_1(\lambda_1) = span$ ｛$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4$｝　（$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4$ の階数はすべて 1）

$N_2(\lambda_1) = span$ ｛$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5$｝　（$\mathbf{v}_3 . \mathbf{v}_5$ の階数は 2）

$N_3(\lambda_1) = span$ ｛$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_5, \mathbf{v}_6$｝ $= N_4(\lambda_1) = N_5(\lambda_1) = \cdots$　（$\mathbf{v}_6$ の階数は 3）

$N_1(\lambda_2) = span$ ｛$\mathbf{w}_1$｝　（$\mathbf{w}_1$ の階数は 1）

$N_2(\lambda_2) = span$ ｛$\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$｝　（$\mathbf{w}_2$ の階数は 2）

$N_3(\lambda_2) = span$ ｛$\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$｝ $= N_4(\lambda_2) = N_5(\lambda_2) = \cdots$　（$\mathbf{w}_3$ の階数は 3）

（直和構造 $N_3(\lambda_1) \oplus N_3(\lambda_2) = \mathbf{C}^{9\times 1}$　に注意！）

この結果は、$\mathbf{x} \in N_k(\lambda_j) \leftrightarrow \mathbf{B}_j{}^k \mathbf{x} = (\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I})^k \mathbf{x} = \mathbf{0} \leftrightarrow (\mathbf{J} - \lambda_j \mathbf{I})^k \mathbf{y} = \mathbf{0}$（$\mathbf{y} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}$）

$(\mathbf{J} - \lambda_j \mathbf{I})^k$（$k = 1, 2, \cdots$）に注目し、最後の式を解けば、得られる（確認して下さい）。

以上の結果について説明する。

(I)は「(I) を満たす鎖列（ジョルダン鎖列）の構築＝ジョルダン分解の構築」であることを意味する。実際、次の 4 本の鎖列

$$C_{1,1} = \{\mathbf{p}\}\ (\mathbf{p} \neq \mathbf{0}, \mathbf{B}_1 \mathbf{p} = \mathbf{0})$$

$$C_{1,2} = \{\mathbf{B}_1 \mathbf{q}, \mathbf{q}\}\ (\mathbf{B}_1 \mathbf{q} \neq \mathbf{0},\ \mathbf{B}_1{}^2 \mathbf{q} = \mathbf{0})$$

$$C_{1,3} = \{\mathbf{B}_1{}^2 \mathbf{r}, \mathbf{B}_1 \mathbf{r}, \mathbf{r}\}\ (\mathbf{B}_1{}^2 \mathbf{r} \neq \mathbf{0}, \mathbf{B}_1{}^3 \mathbf{r} = \mathbf{0})$$

$$C_{2,1} = \{\mathbf{B}_2{}^2 \mathbf{s}, \mathbf{B}_2 \mathbf{s}, \mathbf{s}\}\ (\mathbf{B}_2{}^2 \mathbf{s} \neq \mathbf{0},\ \mathbf{B}_2{}^3 \mathbf{s} = \mathbf{0})$$

を、$\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s}$ をうまく選び、これらの鎖列の合併集合が全空間（この場合は $\mathbf{C}^{9\times 1}$）の基底をなすように構築できたものとすれば、鎖列を横に並べて作った行列

$$\mathbf{V} = \left[\mathbf{p}\ \ \mathbf{B}_1 \mathbf{q}, \mathbf{q} \vdots \mathbf{B}_1{}^2 \mathbf{r}, \mathbf{B}_1 \mathbf{r}, \mathbf{r} \vdots \mathbf{B}_2{}^2 \mathbf{s}, \mathbf{B}_2 \mathbf{s}, \mathbf{s}\right]$$

は、仮定により、可逆行列となり、

$$\mathbf{AV} = \mathbf{VJ}\text{、}\quad \mathbf{J} = diag\{[\lambda_1], \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\}$$

も成立する。ゆえに、これはジョルダン分解を表す。

以上の事実こそ、ジョルダン分解構築の道筋を示すものである。実際には、上のような要請を満たす鎖列の構築には通常の一次独立性を拡張した「部分空間からの独立性」の概念が新たに必要となるので、これを次節で説明する。

次に、(II)(III)から、次の関係が従う：

λ_j に対応する、k 次以上のジョルダンブロックの総数

＝λ_j に対応する、鎖列 $C_{1,1}, C_{1,2}, C_{1,3}, C_{2,1}$ 中の k 階一般固有ベクトルの総数

＝（λ_j に対応する、鎖列 $C_{1,1}, C_{1,2}, C_{1,3}, C_{2,1}$ 中の k 階以下の一般固有ベクトルの総数）

－（λ_j に対応する、鎖列 $C_{1,1}, C_{1,2}, C_{1,3}, C_{2,1}$ 中の $k-1$ 階以下の一般固有ベクトルの総数）

$= \dim N_k(\lambda_j) - \dim N_{k-1}(\lambda_j)$

とくに $k = 1$ とおけば、$N_0 = \{\mathbf{0}\}$ ゆえ、

λ_j に対応するジョルダンブロックの総数＝$\dim N_1(\lambda_j)$

これは前節の公式(3)に他ならない。さらに、

λ_j に対応する、k 次ジョルダンブロックの総数

＝（λ_j に対応する、k 次以上のジョルダンブロックの総数）－（λ_j に対応する、$k+1$ 次以上のジョルダンブロックの総数）

$= (\dim N_k(\lambda_j) - \dim N_{k-1}(\lambda_j)) - (\dim N_{k+1}(\lambda_j) - \dim N_k(\lambda_j))$

$= 2\dim N_k(\lambda_j) - \dim N_{k-1}(\lambda_j) - \dim N_{k+1}(\lambda_j)$

これは前節の公式(2)に他ならない。

以上は特定の例についての分析であるが、これらの結果が一般の場合に拡張可能であることは明らかであろう。

9.3　一次独立性に関する補題

前節で示したように、ジョルダン分解を構築するにはジョルダン鎖列を必要数だけ構築すればよい。このために不可欠な概念が「与えられた部分空間から一次独立なベクトル」の概念である。以下で示すように、これは通常の一次独立性の概念の拡張になっている。

任意のベクトル空間内のベクトルの集合$\{\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_l\}$が与えられた部分空間$M$から一次独立である linearly independent of M、記号で$\{\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_l\}\perp M$（これはこのレッスンだけで使う便宜上の記号である）、とは$c_1\mathbf{a}_1+\cdots+c_l\mathbf{a}_l\in M$となるのは$c_1=\cdots=c_l=0$のときに限ることをいう。

とくに、$M=\{\mathbf{0}\}$なら通常の一次独立性の定義に戻ることは明らかである。また、特定の部分空間から一次独立なベクトルは通常の意味で一次独立であることも明らかである。

次例から見られるように、「Mから一次独立なベクトル$\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_l$」と「$M$外の一次独立なベクトル$\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_l$」は似て非なるものである。

例：$\{\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ \mathbf{a}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\}$は$M=span\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\}$外に存在し、かつ一次独立であるが、

$1\cdot\mathbf{a}_1+1\cdot\mathbf{a}_2=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}\in M$であるから、$\{\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2\}\perp M$とはいえない。

次に示す補題１、補題２はジョルダン鎖列構築の中心部を担う重要な補題である。

補題１　$\{\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_l\}\perp M\leftrightarrow M$の任意かつ特定の基底$\{\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_m\}$に対して$\{\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_l,\mathbf{b}_1,\cdots,\mathbf{b}_m\}$が一次独立

証明　（$\rightarrow$）：
$$\alpha\mathbf{a}_1+\cdots+\alpha_l\mathbf{a}_l+\beta_1\mathbf{b}_1+\cdots+\beta_m\mathbf{b}_m=\mathbf{0}$$
$$\rightarrow\alpha\mathbf{a}_1+\cdots+\alpha_l\mathbf{a}_l=-\beta_1\mathbf{b}_1-\cdots-\beta_m\mathbf{b}_m\in M$$
$$\rightarrow\alpha_1=\cdots=\alpha_l=0\rightarrow\beta_1=\cdots=\beta_m=0$$

（$\leftarrow$）：
$$\alpha\mathbf{a}_1+\cdots+\alpha_l\mathbf{a}_l\in M$$
$\rightarrow\alpha\mathbf{a}_1+\cdots+\alpha_l\mathbf{a}_l=\beta_1\mathbf{b}_1+\cdots+\beta_m\mathbf{b}_m$を満たすスカラー$\beta_1,\cdots,\beta_m$が存在
$$\rightarrow\alpha\mathbf{a}_1+\cdots+\alpha_l\mathbf{a}_l+(-\beta_1)\mathbf{b}_1+\cdots+(-\beta_m)\mathbf{b}_m=\mathbf{0}$$
$$\rightarrow\alpha_1=\cdots=\alpha_l=\beta_1=\cdots=\beta_m=0\quad\blacksquare$$

例１　$S\subset T$を与えられたベクトル空間内の部分空間、$s=\dim S<\dim T=t$、$t-s=r$とし、Sの任意かつ特定の基底を$\{\mathbf{s}_1,\cdots,\mathbf{s}_s\}$とすれば、これに$T$内から適当に選んだ$r$個のベクトル$\{\mathbf{t}_1,\cdots,\mathbf{t}_r\}$を付加して$T$の基底とすることができる。すると、補題１により、$\{\mathbf{t}_1,\cdots,\mathbf{t}_r\}\perp S$が成り立つ。この事実は後ほどよく使う。

例２　$\mathbf{V}=\left[\mathbf{v}_1\cdots\mathbf{v}_n\right]$を$n$次可逆行列とすれば、$\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n\}$は一次独立であるから、その任意の分割$P\cup Q=\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_n\}$、$P\cap Q=\phi$、$P\neq\phi$、$Q\neq\phi$に対して、$P\perp span\ Q$が成り立つ。

補題２　λ_1を与えられた行列$\mathbf{A}$の任意かつ特定の固有値、$\mathbf{B}\equiv\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}$とし、$\mathbf{B}^k$の零空間（＝$\lambda_1$に対応する$k$階一般固有空間）を$N_k$と書くと（$k=1,2,\cdots$）、$\{\mathbf{x},\mathbf{y},\cdots\}\perp N_k$が真なら

$\{\mathbf{Bx},\mathbf{By},\cdots\}\perp N_{k-1}$ も真である。

証明　$c_1\mathbf{Bx}+c_2\mathbf{By}+\cdots\in N_{k-1}\to\mathbf{B}^{k-1}(c_1\mathbf{Bx}+c_2\mathbf{By}+\cdots)=\mathbf{0}\to\mathbf{B}^k(c_1\mathbf{x}+c_2\mathbf{y}+\cdots)=\mathbf{0}$

$\to c_1\mathbf{x}+c_2\mathbf{y}+\cdots\in N_k\to c_1=c_2=\cdots=0$ ($\because\{\mathbf{x},\mathbf{y},\cdots\}\perp N_k$)。これは $\{\mathbf{x},\mathbf{y},\cdots\}\perp N_k$ なら、$\{\mathbf{Bx},\mathbf{By},\cdots\}\perp N_{k-1}$ が成り立つことを示す。■

次の補題３は異なる固有値が共存する場合を扱うために必要となる。

補題３　与えられた n 次行列 $\mathbf{A}$ の相異なる固有値を $\lambda_1,\cdots,\lambda_p$、それぞれの重複度を $n_1,\cdots,n_p$ とする。すなわち、$\mathbf{A}$ の特性多項式を $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=(\lambda_1-\lambda)^{n_1}\cdots(\lambda_r-\lambda)^{n_p}$　$(n_1+\cdots+n_p=n)$ とする。任意かつ特定の固有値 λ_1 に着目し、これまで同様、$\mathbf{B}=\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}$、$N_k\equiv N_k(\lambda_1)=\mathbf{B}^k$ の零空間（＝λ_1 に対応する k 階一般固有空間）とする。すると、包含関係

(*)　$\{\mathbf{0}\}=N_0<N_1<\cdots<N_r=N_{r+1}=\cdots$　ここに　$\dim N_r=\dim N_{r+1}=\cdots=n_1$

を満たすような自然数 $r\le n_1$ が一意的に定まる（「$N_k<N_{k+1}$」は「$N_k\subseteq N_{k+1}$ かつ $N_k\ne N_{k+1}$」を意味するものとする）。すなわち、零空間 $N_1,N_2,\cdots$ は次元がその固有値の重複度に達するまで膨張し続ける。ゆえにまた、一般固有ベクトルの最大階数は対応する固有値の重複度を超えない。

証明　n_1 個の λ_1 をすべて左上に集めた、$\mathbf{A}$ のシュール分解形

$$\mathbf{Q}^*\mathbf{AQ}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \cdots & & & & \\ & \ddots & \cdots & & & \\ & & \lambda_1 & \cdots & & \\ & & & \lambda_2 & \cdots & \\ & & & & \ddots & \cdots \\ \mathbf{0} & & & & & \lambda_p\end{bmatrix}\equiv\mathbf{T}\quad(\mathbf{Q}^*\mathbf{Q}=\mathbf{I})$$

を考える。すると、直接計算により、$k\ge n_1$ なら

$$\mathbf{Q}^*\mathbf{B}^k\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^*(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})^k\mathbf{Q}=\mathbf{T}^k=\begin{bmatrix}0 & \cdots & \mathbf{0} & & & \\ & \ddots & \cdots & & & \\ \mathbf{0} & & 0 & \cdots & & \\ & & & (\lambda_2-\lambda_1)^k & \cdots & \\ & & & & \ddots & \cdots \\ \mathbf{0} & & & & & (\lambda_p-\lambda_1)^k\end{bmatrix}$$

ここに、$\mathbf{T}^k$ の最初の n_1 列はすべて $\mathbf{0}$、また $\lambda_2-\lambda_1\ne0,\cdots,\lambda_p-\lambda_1\ne0$ である。これより、$k\ge n_1$

なら、$\mathbf{B}^k\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の解は $\mathbf{Q}$ の最初の n_1 列の一次結合全体で与えられることがわかる。すなわち、

$N_{n_1}=N_{n_1+1}=\cdots=span\{\mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_{n_1}\}$（$\dim N_{n_1}=n_1$）が成り立つ。一方、一旦 $N_r=N_{r+1}$ が成立すれば、$N_r=N_{r+1}=N_{r+1}=\cdots$ が成立する：実際、任意の $k=2,3,\cdots$ に対して

$$\mathbf{0}=\mathbf{B}^{r+k}\mathbf{x}=\mathbf{B}^{r+1}(\mathbf{B}^{k-1}\mathbf{x})\to\mathbf{0}=\mathbf{B}^{r}(\mathbf{B}^{k-1}\mathbf{x})=\mathbf{B}^{r+k-1}\mathbf{x}\to\cdots\to\mathbf{0}=\mathbf{B}^{r+1}\mathbf{x}\to\mathbf{0}=\mathbf{B}^{r}\mathbf{x}$$

以上を総合すれば、包含関係(*)を満たす自然数 r が一意的に定まることは明らかである。■

9.4　単一固有値をもつ行列のジョルダン分解 Part I

この節では、与えられた n 次行列 $\mathbf{A}$ が単一固有値 λ_1 を持つ場合を考え、$\dim N_k$ $(k=1,2,\cdots)$ の値がわかれば、前節の補題を使ってジョルダン分解 $\mathbf{A}=\mathbf{VJV}^{-1}$ を構築できることを示す。ここに、$N_k\equiv N_k(\lambda_1)$ はこれまで通り $\mathbf{B}^k\equiv(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})^k$ の零空間（すなわち、k 階一般固有空間）を表す。

まず、前節補題 3 により、包含関係 $\{\mathbf{0}\}=N_0<N_1<\cdots<N_r=N_{r+1}=\cdots=\mathbf{C}^{n\times1}$ を満たすような自然数 $r(\le n)$ が一意的に定まる。

例として、$n=7$ とし、与えられた 7 次行列 $\mathbf{A}$ が単一固有値 λ_1（7 重固有値）のみをもち、

(*)　$\dim N_1=3<\dim N_2=5<\dim N_3=6<\dim N_4=\dim N_5=\cdots=7$

とする。ジョルダン分解構築手続きを以下に示す。

(I) (*)より、一般固有ベクトルの最高階数は 4 である。そして、$\dim N_4-\dim N_3=7-6=1$ ゆえ、前節補題 1 により、$\{\mathbf{w}\}\perp N_3$ を満たす $\mathbf{w}\in N_4$ がとれる。これを頂点とする鎖列

$$C_1\equiv\{\mathbf{B}^3\mathbf{w},\ \mathbf{B}^2\mathbf{w},\ \mathbf{Bw},\ \mathbf{w}\}\ (\mathbf{B}^3\mathbf{w}\ne\mathbf{0}、\mathbf{B}^4\mathbf{w}=\mathbf{0})$$

を作る（これは 4 次ブロックに対応するジョルダン鎖列を表す)。前節補題 2 により

$$\{\mathbf{Bw}\}\perp N_2,\ \{\mathbf{B}^2\mathbf{w}\}\perp N_1,\ \{\mathbf{B}^3\mathbf{w}\}\perp N_0=\{\mathbf{0}\}$$

である。

(II)　$\dim N_3-\dim N_2=6-5=1$ ゆえ、$\{\mathbf{x}\}\perp N_2$ を満たす $\mathbf{x}\in N_3$ が 1 個とれる (2 個とはとれない)。このような $\mathbf{x}$ として $\mathbf{Bw}\in C_1$ がすでに存在する。したがってこの段階ではこれ以上何もしない。

(III)　$\dim N_2-\dim N_1=5-3=2$ だから、$\{\mathbf{y},\mathbf{z}\}\perp N_1$ を満たす $\mathbf{y},\mathbf{z}\in N_2$ が 2 個とれる（3 個はとれない)。このようなベクトルの一つとして、すでに $\mathbf{B}^2\mathbf{w}\in C_1$ が存在する。そこで、

$\mathbf{y}=\mathbf{B}^2\mathbf{w}$ とし、$\{\mathbf{B}^2\mathbf{w},\mathbf{z}\}\perp N_1$ を満たす $\mathbf{z}\in N_2$ を選び、これを頂点とする鎖列

$$C_2 = \{\mathbf{z},\ \mathbf{Bz}\}\ \ (\mathbf{Bz} \neq \mathbf{0},\ \mathbf{B}^2\mathbf{z} = \mathbf{0})$$

を作る（これは 2 次ブロックに対応する鎖列を表す)。

(IV) $\dim N_1 - \dim N_0 = 3 - 0 = 3\ \ (N_0 = \{\mathbf{0}\})$ だから、$\{\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}\} \perp N_0$ を満たす $\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in N_1$ が 3 個とれる(4 個はとれない)。このような $\mathbf{t}, \mathbf{u}$ としてすでに鎖列 C_1, C_2 中に $\mathbf{B}^3\mathbf{w} \in C_1,\ \mathbf{Bz} \in C_2$ が存在する（前節補題 2)。そこで、$\{\mathbf{B}^3\mathbf{w}, \mathbf{Bz}, \mathbf{v}\} \perp N_0$ を満たす $\mathbf{v} \in N_1$ $\mathbf{v}$ を選ぶ。そして鎖列

$$C_3 = \{\mathbf{v}\}\ \ (\mathbf{v} \neq \mathbf{0},\ \mathbf{Bv} = \mathbf{0})$$

を作る（これは 1 次ブロックに対応する鎖列を表す)。

(V) $\mathbf{V} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{v} & \mathbf{Bz} & \mathbf{z} & \mathbf{B}^3\mathbf{w} & \mathbf{B}^2\mathbf{w} & \mathbf{Bw} & \mathbf{w} \end{bmatrix}$ を作る。すると、これまでに何度もやった計算により

$$(**) \qquad \mathbf{AV} = \mathbf{V}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_1 & 1 & & & & \\ & 0 & \lambda_1 & & & & \\ & & & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ \mathbf{0} & & & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \mathbf{VJ}$$

が得られる。

(VI) 残る作業は $\mathbf{V}$ の可逆性、すなわち、$\mathbf{V}$ の列全体が一次独立であること、すなわち、

$$a_1\mathbf{w} + a_2\mathbf{Bw} + a_3\mathbf{B}^2\mathbf{w} + a_4\mathbf{B}^3\mathbf{w} + b_1\mathbf{z} + b_2\mathbf{Bz} + c_1\mathbf{v} = \mathbf{0} \to a_1 = \cdots = c_1 = 0$$

を示すことのみである。まず、$a_1\mathbf{w} = -a_2\mathbf{Bw} - \cdots \in N_3$ $(\because \mathbf{B}^3\{-a_2\mathbf{Bw} - \cdots\} = \mathbf{0})$ に $\{\mathbf{w}\} \perp N_3$ を考慮すると、$a_1 = 0$ が従う。これを使うと、$a_2\mathbf{Bw} = -a_3\mathbf{B}^2\mathbf{w} - \cdots \in N_2$ $(\because \mathbf{B}^2\{-a_3\mathbf{B}^2\mathbf{w} - \cdots\} = \mathbf{0})$。$\mathbf{Bw} \perp N_2$ ゆえ、$a_2 = 0$ が出る。$a_1 = a_2 = 0$ を使うと、

$a_3\mathbf{B}^2\mathbf{w} + b_1\mathbf{z} = -a_4\mathbf{B}^3\mathbf{w} - b_2\mathbf{Bz} - c_1\mathbf{v} \in N_1$ $(\because \mathbf{B}\{-a_4\mathbf{B}^3\mathbf{w} - \cdots\} = \mathbf{0})$。(III)より $\{\mathbf{B}^2\mathbf{w}, \mathbf{z}\} \perp N_1$ であるから、$a_3 = b_1 = 0$ が従う。以上から、$a_4\mathbf{B}^3\mathbf{w} + b_2\mathbf{Bz} + c_1\mathbf{v} = \mathbf{0} \in N_0$。

ところが(IV)から、$\{\mathbf{B}^3\mathbf{w}, \mathbf{Bz}, \mathbf{v}\} \perp N_0 = \{\mathbf{0}\}$（すなわち、$\{\mathbf{B}^3\mathbf{w}, \mathbf{Bz}, \mathbf{v}\}$ は一次独立）であるか

ら、$a_4 = b_2 = c_1 = 0$ が出る。以上により、問題の一次結合の係数はすべて 0 であることが確認されたので、**V** の列は一次独立である。

以上により(**)がジョルダン分解を表すことがわかった。

一般に、**V** は一意的には定まらない。これはこれまでの構築法から明らかであろう。また、

$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^3\mathbf{w} & \mathbf{B}^2\mathbf{w} & \mathbf{Bw} & \mathbf{w} & \mathbf{v} & \mathbf{Bz} & \mathbf{z} \end{bmatrix}$ とすれば、$\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{J}^{'}\mathbf{X}^{-1}$、

$$\mathbf{J}^{'} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & & & \mathbf{0} \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & & & \\ & & & & \lambda_1 & & \\ & & & & & \lambda_1 & 1 \\ \mathbf{0} & & & & & & \lambda_1 \end{bmatrix}$$ が成り立つ。これもジョルダン分解である。

9.6 単一固有値をもつ行列のジョルダン分解 Part II

前節では例を使ってジョルダン分解構築法を説明した。ここでは単一固有値の仮定はそのまま引継ぎ、これまでの成果を一般論の形に整理する。

与えられた行列を $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{n \times n}$ とし、特性多項式を $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (\lambda_1 - \lambda)^n$ とする。これまで通り、$\mathbf{B} \equiv \mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}$、$N_k \equiv \mathbf{B}^k$ の零空間、$d_k = \dim N_k$、$f(k) = 2d_k - d_{k-1} - d_{k+1}$ とおく（$k = 1, 2, \cdots$、$N_0 \equiv \{\mathbf{0}\}$）。

(I)　9.3 節補題 3 により

$\{\mathbf{0}\} = N_0 < N_1 < \cdots < N_r = N_{r+1} = \cdots$　　ここに　$\dim N_r = \dim N_{r+1} = \cdots = n$

を満たす自然数 $r \le n$ が一意的に定まる（「$N_k < N_{k+1}$」は「$N_k \subseteq N_{k+1}$ かつ $N_k \ne N_{k+1}$」）。

(II)　(I)より、一般固有ベクトルの最高階数は r である。すると、$d_r = d_{r+1}$ となり、$f(r) = 2d_r - d_{r-1} - d_{r+1} = d_r - d_{r-1} = n - \dim N_{r-1}$。すると、9.3 節補題 1 により

$\{\mathbf{w}_1^{(r)}, \cdots, \mathbf{w}_{f(r)}^{(r)}\} \perp N_{r-1}$ を満たす $\mathbf{w}_1^{(r)}, \cdots, \mathbf{w}_{f(r)}^{(r)} \in N_r$ がとれる。そして、これらを頂点とする、$f(r)$ 個の鎖列を定義する：

$$C_1^{(r)} \equiv \{\mathbf{B}^{r-1}\mathbf{w}_1^{(r)},\ \mathbf{B}^{r-2}\mathbf{w}_1^{(r)}, \cdots, \mathbf{Bw}_1^{(r)},\ \mathbf{w}_1^{(r)}\}\ (\mathbf{B}^{r-1}\mathbf{w}_1^{(r)} \ne \mathbf{0},\ \mathbf{B}^r\mathbf{w}_1^{(r)} = \mathbf{0})$$

……………………………………

$$C_{f(r)}^{(r)} \equiv \{\mathbf{B}^{r-1}\mathbf{w}_{f(r)}^{(r)},\ \mathbf{B}^{r-2}\mathbf{w}_{f(r)}^{(r)}, \cdots, \mathbf{Bw}_{f(r)}^{(r)},\ \mathbf{w}_{f(r)}^{(r)}\}\ (\mathbf{B}^{r-1}\mathbf{w}_{f(r)}^{(r)} \ne \mathbf{0},\ \mathbf{B}^r\mathbf{w}_{f(r)}^{(r)} = \mathbf{0})$$

これらは結果的に r 次ジョルダンブロックに対応するジョルダン鎖列となる。
(III)　$\dim N_{r-1} - \dim N_{r-2} = d_{r-1} - d_{r-2}$ ゆえ、9.3 節補題 1 により、$\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \cdots\} \perp N_{n-2}$ を満たす $d_{r-1} - d_{r-2}$ 個のベクトル $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \cdots \in N_{r-1}$ が存在する。しかし、$\mathbf{Bw}_1^{(r)}, \cdots, \mathbf{Bw}_{f(r)}^{(r)} \in N_{r-1}$ であり、9.4 節補題 2 により、$\{\mathbf{Bw}_1^{(r)}, \cdots, \mathbf{Bw}_{f(r)}^{(r)}\} \perp N_{r-2}$ である。ゆえに、これらに最大

$$d_{r-1} - d_{r-1} - f(r) = d_{r-1} - d_{r-1} - (d_r - d_{r-1}) = 2d_{r-1} - d_{r-2} - d_r = f(r-1) \text{ 個}$$

のベクトル $\mathbf{w}_1^{(r-1)}, \cdots, \mathbf{w}_{f(r-1)}^{(r-1)} \in N_{r-1}$ を追加し、$\mathbf{Bw}_1^{(r)}, \cdots, \mathbf{Bw}_{f(r)}^{(r)}, \mathbf{w}_1^{(r-1)}, \cdots, \mathbf{w}_{f(r-1)}^{(r-1)} \perp N_{r-2}$ となるようにできる。（N_{r-2} の任意かつ特定の基底に、$\mathbf{Bw}_1^{(r)}, \cdots, \mathbf{Bw}_{f(r)}^{(r)}, \mathbf{w}_1^{(r-1)}, \cdots, \mathbf{w}_{f(r-1)}^{(r-1)}$ という、$f(r) + f(r-1) = d_{r-1} - d_{r-2}$ 個のベクトルを追加すると N_{r-1} の基底となる。）
$\mathbf{w}_1^{(r-1)}, \cdots, \mathbf{w}_{f(r-1)}^{(r-1)}$ を頂点とする、$f(r-1)$ 個の鎖列を定義する：

$$C_1^{(r-1)} \equiv \{\mathbf{B}^{r-2}\mathbf{w}_1^{(r-1)}, \mathbf{B}^{r-3}\mathbf{w}_1^{(r-1)}, \cdots, \mathbf{Bw}_1^{(r-1)}, \mathbf{w}_1^{(r-1)}\}\ (\mathbf{B}^{r-2}\mathbf{w}_1^{(r-1)} \neq \mathbf{0}, \mathbf{B}^{r-1}\mathbf{w}_1^{(r-1)} = \mathbf{0})$$

…………………

$$C_1^{(r-1)} \equiv \{\mathbf{B}^{r-2}\mathbf{w}_{f(r-1)}^{(r-1)}, \mathbf{B}^{r-3}\mathbf{w}_{f(r-1)}^{(r-1)}, \cdots, \mathbf{Bw}_{f(r-1)}^{(r-1)}, \mathbf{w}_{f(r-1)}^{(r-1)}\}\ (\mathbf{B}^{r-2}\mathbf{w}_{f(r-1)}^{(r-1)} \neq \mathbf{0}, \mathbf{B}^{r-1}\mathbf{w}_{f(r-1)}^{(r-1)} = \mathbf{0})$$

これらは結果的に $r-1$ 次ジョルダンブロックに対応するジョルダン鎖列を表すことになる。
(IV)　以下これまでと同様の作業を繰り返す。結果を表の形にまとめて示すと：

$$C_1^{(r)} \equiv \{\mathbf{B}^{r-1}\mathbf{w}_1^{(r)}, \mathbf{B}^{r-2}\mathbf{w}_1^{(r)}, \cdots, \mathbf{Bw}_1^{(r)}, \mathbf{w}_1^{(r)}\}\ (\mathbf{B}^{r-1}\mathbf{w}_1^{(r)} \neq \mathbf{0}, \mathbf{B}^{r}\mathbf{w}_1^{(r)} = \mathbf{0})$$

………………………………

$$C_{f(r)}^{(r)} \equiv \{\mathbf{B}^{r-1}\mathbf{w}_{f(r)}^{(r)}, \mathbf{B}^{r-2}\mathbf{w}_{f(r)}^{(r)}, \cdots, \mathbf{Bw}_{f(r)}^{(r)}, \mathbf{w}_{f(r)}^{(r)}\}\ (\mathbf{B}^{r-1}\mathbf{w}_{f(r)}^{(r)} \neq \mathbf{0}, \mathbf{B}^{r}\mathbf{w}_{f(r)}^{(r)} = \mathbf{0})$$

$$C_1^{(r-1)} \equiv \{\mathbf{B}^{r-2}\mathbf{w}_1^{(r-1)}, \mathbf{B}^{r-3}\mathbf{w}_1^{(r-1)}, \cdots, \mathbf{Bw}_1^{(r-1)}, \mathbf{w}_1^{(r-1)}\}\ (\mathbf{B}^{r-2}\mathbf{w}_1^{(r-1)} \neq \mathbf{0}, \mathbf{B}^{r-1}\mathbf{w}_1^{(r-1)} = \mathbf{0})$$

…………………

$$C_1^{(r-1)} \equiv \{\mathbf{B}^{r-2}\mathbf{w}_{f(r-1)}^{(r-1)}, \mathbf{B}^{r-3}\mathbf{w}_{f(r-1)}^{(r-1)}, \cdots, \mathbf{Bw}_{f(r-1)}^{(r-1)}, \mathbf{w}_{f(r-1)}^{(r-1)}\}\ (\mathbf{B}^{r-2}\mathbf{w}_{f(r-1)}^{(r-1)} \neq \mathbf{0}, \mathbf{B}^{r-1}\mathbf{w}_{f(r-1)}^{(r-1)} = \mathbf{0})$$

……………………
……………………

$$C_1^{(1)} \equiv \{\mathbf{w}_1^{(1)}\}\ (\mathbf{w}_1^{(1)} \neq \mathbf{0}, \mathbf{Bw}_1^{(1)} = \mathbf{0})$$

……………………

$C^{(1)}_{f(1)} \equiv \{\mathbf{w}^{(1)}_{f(1)}\}\ \ (\mathbf{w}^{(1)}_{f(1)} \neq \mathbf{0}, \mathbf{B}\mathbf{w}^{(1)}_{f(1)} = \mathbf{0})$

この表中のベクトルの総数はnに等しい。実際、同一階数のベクトルを数えていくと、

$$
\begin{aligned}
\text{総数} &= f(r)+\{f(r)+f(r-1)\}+\{f(r)+f(r-1)+f(r-2)\}\cdots+\{f(r)+\cdots+f(1)\}\\
&=(d_r-d_{r-1})+(d_{r-1}-d_{r-2})+\cdots(d_1-d_0)\\
&=d_r=\dim N_r=n
\end{aligned}
$$

前節で使った論法を使えば「表中のベクトルは全体として一次独立である」ことが証明される。実際、「上の表中のすべてのベクトルの一次結合＝$\mathbf{0}$」とおいた式を考え、これを

r階一般固有ベクトル$\mathbf{w}^{(r)}_1,\cdots,\mathbf{w}^{(r)}_{f(r)}$の一次結合＝$r-1$階以下の一般固有ベクトルの一次結合

の形に変形すれば、$\{\mathbf{w}^{(r)}_1,\cdots,\mathbf{w}^{(r)}_{f(r)}\}\perp N_{r-1}$ゆえ、左辺の係数はすべて$0$でなければならない。

ゆえに、上式は「表中の$r-1$階以下の一般固有ベクトルの一次結合＝$\mathbf{0}$」となる。上と同様に進めば、問題の一次独立性が証明される。

(V) n次行列$\mathbf{V}=\left[\text{"}C^{(r)}_1\text{"}\cdots\text{"}C^{(r)}_{f(r)}\text{"}\cdots\cdots\text{"}C^{(1)}_1\text{"}\cdots\text{"}C^{(1)}_{f(1)}\text{"}\right]$

を定義する。ただし"$C^{(r)}_1$",$\cdots$は、それぞれ、鎖列$C^{(r)}_1,\cdots$を構成するベクトルを順に並べて得

られる$n\times r,\cdots$行列、すなわち、$\left[\mathbf{B}^{r-1}\mathbf{w}^{(r)}_1\ \ \mathbf{B}^{r-2}\mathbf{w}^{(r)}_1\cdots\mathbf{B}\mathbf{w}^{(r)}_1\ \ \mathbf{w}^{(r)}_1\right],\cdots$を表す。すると

$$
\mathbf{AV}=\mathbf{VJ},\ \ \mathbf{J}=\begin{bmatrix}
\mathbf{J}^{(r)}_1 & & & & & & \mathbf{0}\\
 & \ddots & & & & & \\
 & & \mathbf{J}^{(r)}_{f(r)} & & & & \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & & & \mathbf{J}^{(1)}_1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
\mathbf{0} & & & & & & \mathbf{J}^{(1)}_{f(1)}
\end{bmatrix}
$$

ここに

$$
\mathbf{J}^{(r)}_1=\cdots\mathbf{J}^{(r)}_{f(r)}=\begin{bmatrix}
\lambda_1 & 1 & & \mathbf{0}\\
 & \lambda_1 & 1 & \\
 & & \ddots & \ddots\\
\mathbf{0} & & & \lambda_1
\end{bmatrix}\ (r\times r\text{ 行列})、\cdots、\mathbf{J}^{(1)}_1=\cdots\mathbf{J}^{(1)}_{f(1)}=\left[\lambda_1\right]\ (1\times 1\text{行列})
$$

すでに証明したように、$\mathbf{V}$の列は全体として一次独立であるから、$\mathbf{V}$は可逆行列であり、上式はジョルダン分解と同値$\mathbf{A}=\mathbf{VJV}^{-1}$と同値である。

以上で単一固有値の場合のジョルダン分解構築の話が済んだので、次節では数個の異なる固有値をもつ行列のジョルダン分解構築の話に移るが、これまでの話に付け加えるべきは、異なる固有値ごとにこれまでの方法を適用し、結果を総合することだけに過ぎない。

9.6　異なる固有値をもつ行列のジョルダン分解

いま、$\mathbf{A}$ を与えられた n 次行列、$\lambda_1,\cdots,\lambda_p$ を相異なる固有値、それぞれの重複度を

$n_1,\cdots,n_p$ とする。すなわち、$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=(\lambda_1-\lambda)^{n_1}\cdots(\lambda_r-\lambda)^{n_p}\quad(n_1+\cdots+n_p=n)$ とする。

いま、$\mathbf{B}_i=\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I}$ 、$N_k(\lambda_1)=\mathbf{B}_i^{\,k}$ の零空間（＝ λ_i に対応する k 階一般固有空間）とすれば、

9.4 節補題 3 により、

$\{\mathbf{0}\}=N_0(\lambda_i)<N_1(\lambda_i)<\cdots<N_{r(i)}(\lambda_i)=N_{r(i)+1}=\cdots$、　$\dim N_r=\dim N_{r+1}=\cdots=n_i$

を満たすような自然数 $r\le n_i$ が一意的に定まる（$i=1,\cdots,p$）。

(I) 前節と全く同一の方法を用いて、異なる固有値 $\lambda_i\ (i=1,\cdots,p)$ ごとに部分的なジョルダン分解を構築する：

$$\mathbf{A}\mathbf{V}^{(i)}=\mathbf{V}^{(i)}\mathbf{J}^{(i)},\quad \mathbf{J}^{(i)}=\begin{bmatrix}\mathbf{J}_1^{(i)} & & \mathbf{0}\\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \ddots\end{bmatrix}:n_i\times n_i$$

ここに　$\mathbf{J}_1^{(k)},\cdots$ の形は$\left[\lambda_i\right]$または$\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & \mathbf{0}\\ & \ddots & \ddots\\ \mathbf{0} & & \lambda_i\end{bmatrix}$（2 次以上の場合）であり、$\mathbf{V}^{(i)}$ は λ_i に対応する一次独立な一般固有ベクトル n_i 個の列から構成される $n\times n_i$ 行列を表す。

(II) (I)で得られた結果を総合する。すなわち、$n\times n$ 行列 $\mathbf{V}=\left[\mathbf{V}^{(1)}\ \mathbf{V}^{(2)}\cdots\mathbf{V}^{(p)}\right]$

（$\because\ n_1+\cdots+n_p=n$）を定義すれば、$\mathbf{AV}=\mathbf{VJ},\ \ \mathbf{J}=\begin{bmatrix}\mathbf{J}^{(1)} & & \mathbf{0}\\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{J}^{(p)}\end{bmatrix}$ が成り立つことは明らかである。しかも、以下で示すように、$\mathbf{V}$ の列は一次独立である。ゆえに、$\mathbf{V}^{-1}$ は確かに存在し、最後の式はジョルダン分解 $\mathbf{A}=\mathbf{VJV}^{-1}$ と同値となる。

$\mathbf{V}$ の列が一次独立であることを示す。そこで列全体の一次結合＝$\mathbf{0}$ と置いた式

(*)　$\mathbf{V}^{(1)}\mathbf{c}^{(1)}+\cdots\mathbf{V}^{(p)}\mathbf{c}^{(p)}=\mathbf{0}$

を考える。ここに $\mathbf{c}^{(1)} = \left[c_1^{(1)},\cdots,c_{n_1}^{(1)}\right]^T,\cdots$ は未知係数からなるベクトルを表す。$\mathbf{c}^{(1)} = \mathbf{0}$ を示せば十分である。仮に $\mathbf{c}^{(1)} \neq \mathbf{0}$ とすれば、$\mathbf{V}^{(1)}$ の列の一次独立性より $\mathbf{V}^{(1)}\mathbf{c}^{(1)} \neq \mathbf{0}$ となり、これは固有値 λ_1 に対応する一般固有ベクトルの一次結合だから、やはり固有値 λ_1 に対応する一般固有ベクトルを表す。その階数を $m\ (1 \le m \le n_1)$ とすれば、

$$\mathbf{v} \equiv (\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})^{m-1}\mathbf{V}^{(1)}\mathbf{c}^{(1)} \neq \mathbf{0},\ (\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}\quad（\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}）$$

が成り立つ。次に、 $f_1(\mathbf{A}) \equiv (\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})^{m-1}(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})^{n_2}\cdots(\mathbf{A}-\lambda_p\mathbf{I})^{n_p}$ を(*)に左から乗じると

$$\text{(**)}\quad \mathbf{0} = f_1(\mathbf{A})(\mathbf{V}^{(1)}\mathbf{c}^{(1)} + \cdots \mathbf{V}^{(p)}\mathbf{c}^{(p)}) = f_1(\mathbf{A})\mathbf{V}^{(1)}\mathbf{c}^{(1)} + f_1(\mathbf{A})\mathbf{V}^{(2)}\mathbf{c}^{(2)} + \cdots + f_1(\mathbf{A})\mathbf{V}^{(p)}\mathbf{c}^{(p)}$$

$f_1(\mathbf{A})$ の中の各因子は互いに可換であり、$i = 2,\cdots,p$ に対して $\mathbf{V}^{(i)}$ の各列は λ_i に対応する高々 n_i 階の一般固有ベクトルゆえ、 $(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})^{n_i}\mathbf{V}^{(i)} = \mathbf{0}$ （$i = 2,\cdots,p$）。ゆえに、

$f_1(\mathbf{A})\mathbf{V}^{(i)}\mathbf{c}^{(i)} = \mathbf{0}$ （$i = 2,\cdots,p$）が出る。一方、 $f_1(\mathbf{A})\mathbf{V}^{(1)}\mathbf{c}^{(1)}$ は、$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}$ ゆえ、

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{A})\mathbf{V}^{(1)}\mathbf{c}^{(1)} &= (\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})^{n_2}\cdots(\mathbf{A}-\lambda_p\mathbf{I})^{n_p}(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})^{m-1}\mathbf{V}^{(1)}\mathbf{c}^{(1)} \\ &= (\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})^{n_2}\cdots(\mathbf{A}-\lambda_p\mathbf{I})^{n_p}\mathbf{v} = (\lambda_1-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda_1-\lambda_p)^{n_p}\mathbf{v} \end{aligned}$$

以上により、(**)式より、$\mathbf{0} = (\lambda_1-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda_1-\lambda_p)^{n_p}\mathbf{v}$ が出る。$\lambda_1,\cdots,\lambda_p$ は相異なるから、これは $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ を意味する。しかしこれは $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ と矛盾する。

以上によって 9.1 節でのべたジョルダン分解の一般形が完全に証明された。ジョルダン分解は、述べ方は簡単だが、証明には手間を要した。こういう定理は応用性に富むのが普通である。応用の説明は次のレッスンで行う。

最後にひとこと：ジョルダン分解 $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{J}\mathbf{V}^{-1}$ の理解は、これを $\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{V}\mathbf{J}$ と書き直し、対応する列を等置し、$\mathbf{V}$ の列が鎖列の合併集合をなすこと、各鎖列（ジョルダン鎖列）とジョルダンブロックが 1 対 1 対応をなすこと、に着目することから始まる。わからなくなったら、もう一度この出発点に帰ればよい。$\mathbf{J}$ は異なる固有値ごとに各階一般固有空間の次元がわかれば確定する。$\mathbf{V}$ は各階一般固有空間内のベクトルから巧妙な手続きで構築される。次のレッスンではジョルダン分解の応用を扱う。

腕試し問題

問題 9.1　ある 10 次行列 $\mathbf{A}$ のジョルダン分解が次式によってあたえられるという：

$$(1)\quad \mathbf{A}=\mathbf{V}\begin{bmatrix}\mathbf{J}_1 & & & & \mathbf{0}\\ & \mathbf{J}_2 & & & \\ & & \mathbf{J}_3 & & \\ & & & \mathbf{J}_4 & \\ \mathbf{0} & & & & \mathbf{J}_5\end{bmatrix}\mathbf{V}^{-1}\in\mathbf{C}^{10\times10},\ \mathbf{V}=\left[\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_{10}\right]\in\mathbf{C}^{10\times10}$$

ここに

$$\mathbf{J}_1=\left[2\right],\ \mathbf{J}_2=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix},\ \mathbf{J}_3=\left[3\right],\ \mathbf{J}_4=\begin{bmatrix}4&1\\0&4\end{bmatrix},\quad \mathbf{J}_5=\begin{bmatrix}4&1&0&0\\0&4&1&0\\0&0&4&1\\0&0&0&4\end{bmatrix}$$

(I) 次表の空欄を埋めよ：

固有値	対応する一般固有ベクトル	階数
	$\mathbf{v}_1$	
2	$\mathbf{v}_2$	
	$\mathbf{v}_3$	
	$\mathbf{v}_4$	1
		1
4		
		2

(II)　$(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{w}=\mathbf{v}_3$ を満たす $\mathbf{w}\in\mathbf{C}^{10\times1}$ は存在しないことを示せ。同様に

$(\mathbf{A}-3\mathbf{I})\mathbf{w}=\mathbf{v}_4$，$(\mathbf{A}-4\mathbf{I})\mathbf{w}=\mathbf{v}_6$，$(\mathbf{A}-4\mathbf{I})\mathbf{w}=\mathbf{v}_{10}$ も解をもたないことを示せ。以上はジョル

ダン鎖列の最大性を示す。

（略解　(I)

固有値	対応する一般固有ベクトル	階数
2	$\mathbf{v}_1$	1
	$\mathbf{v}_2$	1
	$\mathbf{v}_3$	2
3	$\mathbf{v}_4$	1
4	$\mathbf{v}_5$	1
	$\mathbf{v}_6$	2
	$\mathbf{v}_7$	1
	$\mathbf{v}_8$	2
	$\mathbf{v}_9$	3
	$\mathbf{v}_{10}$	4

(II)　背理法による。仮に$(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\mathbf{w}=\mathbf{v}_3$が解$\mathbf{w}$をもったとすれば、$\mathbf{w}$は 3 階一般固有ベクトルを表すことになる（$\because (\mathbf{A}-2\mathbf{I})^2\mathbf{w}=\mathbf{v}_2\neq\mathbf{0}, (\mathbf{A}-2\mathbf{I})^3\mathbf{w}=\mathbf{0}$）。すると、$\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{w}\}$が一次独立となり、$\dim N_3(2)\geq 4$となる。しかし、$\dim N_3(2)$の値は 2 の重複度 3 を超えないはずである（9.2 節補題 3)。　（別法）$\mathbf{w}$の基底$\{\mathbf{v}_1,\cdots,\mathbf{v}_{10}\}$による展開$\mathbf{w}=c_1\mathbf{v}_1+\cdots c_{10}\mathbf{v}_{10}$に、$\mathbf{B}\equiv(\mathbf{A}-3\mathbf{I})(\mathbf{A}-4\mathbf{I})^4(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^2$を乗じても矛盾を導くことができる。■）

問題 9.2　ある 4 次行列$\mathbf{A}$の特性多項式は$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=(3-\lambda)^4$によって与えられるという。可能な$\mathbf{A}$のジョルダン標準形をすべてあげよ。

（略解　(1) 4 次ブロック 1 個、(2) 3 次、1 次ブロック各 1 個、(3) 2 次ブロック 2 個、(4) 2 次ブロック 1 個、1 次ブロック 2 個、(5) 1 次ブロック 4 個　■）

問題 9.3　ある 10 次行列$\mathbf{A}$は単一固有値λ_1をもち、$N_k\equiv$「$(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})^k$の零空間」（$k=1,2,\cdots$）について、$\dim N_1=5,\ \dim N_2=8,\ \dim N_3=10$が知られているという。$\mathbf{A}$のジョルダン標準形を求めよ。

（略解　9.1 節の公式「k次ジョルダンブロックの総数＝$2\dim N_k-\dim N_{k-1}-\dim N_{k+1}$」を使うと、1 次ジョルダンブロックの総数＝2、2 次ジョルダンブロックの総数＝1、3 次ジョルダンブロックの総数＝2、が得られる。これよりジョルダン標準形は次式で与えられる：

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & & & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{J}_2 & & & \\ & & \mathbf{J}_3 & & \\ & & & \mathbf{J}_4 & \\ \mathbf{0} & & & & \mathbf{J}_5 \end{bmatrix},\ \mathbf{J}_1 = \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \end{bmatrix},\ \mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix},\ \mathbf{J}_4 = \mathbf{J}_5 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \quad ■)$$

問題 9.4　ある 4 次行列 $\mathbf{A}$ は特性多項式 $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = (1+\lambda)^4$ をもち、4 階一般固有ベクトル $\mathbf{w}$ が存在するという。$\mathbf{A}$ のジョルダン分解を求めよ。

（略解　$\mathbf{B} = \mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}$（$\lambda_1 = -1$）とすれば、$\{\mathbf{B}^3\mathbf{w}, \mathbf{B}^2\mathbf{w}, \mathbf{B}\mathbf{w}, \mathbf{w}\}$ は、$\mathbf{w}$ を頂点とする鎖列を表わすから、一次独立である。$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^3\mathbf{w} & \mathbf{B}^2\mathbf{w} & \mathbf{B}\mathbf{w} & \mathbf{w} \end{bmatrix}$ とすれば、

$$\mathbf{AV} = \mathbf{VJ},\ \mathbf{J} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

が成り立つ。$\mathbf{V}$ は可逆行列ゆえ、これはジョルダン分解を表す。■）

問題 9.5　3 次行列 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ の特性多項式を求め、$\mathbf{A}$ の固有値は $\lambda_1 = 1$（3 重固有値）であることを示し、$\mathbf{A}$ のジョルダン分解 $\mathbf{A} = \mathbf{VJV}^{-1}$ を求めよ。

（略解　$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = (1-\lambda)^3$ ゆえ、$\mathbf{A}$ の固有値は 3 重固有値 1 のみである。

$\mathbf{B} = \mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I} = \mathbf{A} - \mathbf{I}$ とすれば、$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$、$\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$

ゆえに、$\mathbf{Bx} = \mathbf{0} \iff x_1 - 2x_2 - x_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} = 0 \quad (\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T)$

この独立解は 2 個存在する（∵係数行列の階数＝1、列数＝3、零空間の次元＝3-1=2)。ゆえに、

$\dim N_0 = 0,\ \dim N_1 = 2,\ \dim N_2 = 3 = \dim N_3 = \cdots$、ここに $N_k =$「$(\mathbf{A}-\mathbf{I})^k$ の零空間」（$k = 0,1,\cdots$）。以上から、

　2 次ブロックの総数＝ $2\dim N_2 - \dim N_1 - \dim N_3 = 2\cdot 3 - 2 - 3 = 1$

　1 次ブロックの総数＝ $2\dim N_1 - \dim N_0 - \dim N_2 = 2\cdot 2 - 0 - 3 = 1$

ゆえに、$\mathbf{A}$ のジョルダン標準形として、$\mathbf{J}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ でをとる（$\mathbf{J}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ も可)。

次に $\mathbf{V}$ を構築する。まず、$\mathbf{w}\perp N_1$（$\mathbf{w}\in N_2$）を満たす $\mathbf{w}$ として、先に出した $\mathbf{Bx}=\mathbf{0}$ の式より、$\mathbf{w}=\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\end{bmatrix}$ を選ぶ。すると、$\mathbf{Bw}=\begin{bmatrix}1&-2&-1\\1&-2&-1\\-1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$ （$\in N_1$）

次に、 $\mathbf{v},\mathbf{Bw}\perp N_0(\mathbf{v},\mathbf{Bw}\in N_1)$ を満たす $\mathbf{v}$、すなわち、$\{\mathbf{v},\mathbf{Bw}\}$ が一次独立になるような $\mathbf{v}$、を一つ選ぶ。$\mathbf{v}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ が可能な選択である。すると、$\mathbf{V}=\begin{bmatrix}\mathbf{v}&\mathbf{Bw}&\mathbf{w}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&6&1\\0&6&-2\\1&-6&-1\end{bmatrix}$。念のため、$\mathbf{AV}=\mathbf{VJ}$ および $\det\mathbf{V}\neq 0$ を検算して頂きたい。■）

問題 9.6　与えられた 13 次行列 $\mathbf{A}$ について、$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=(\lambda_1-\lambda)^{13}$ および $\dim N_1=7,\ \dim N_2=11,\ \dim N_3=13=\dim N_4=\cdots$ が知られているという。ここに $N_k=(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})^k$ の零空間（$k=0,1,2,\cdots$、$N_0\equiv\{\mathbf{0}\}$）。$\mathbf{A}$ のジョルダン分解を構築せよ。

（略解　固有値は単一固有値 λ_1 のみである。

1 次ジョルダンブロックの総数＝$2\dim N_1-\dim N_0-\dim N_2=2\cdot 7-0-11=3$

2 次ジョルダンブロックの総数＝$2\dim N_2-\dim N_1-\dim N_3=2\cdot 11-7-13=2$

3 次ジョルダンブロックの総数＝$2\dim N_3-\dim N_2-\dim N_4=2\cdot 13-11-13=2$

ゆえに、$\mathbf{A}$ のジョルダン標準形 $\mathbf{J}$ は

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix}\mathbf{J}_1&&\mathbf{0}\\&\ddots&\\\mathbf{0}&&\mathbf{J}_7\end{bmatrix}、\ \mathbf{J}_1=\mathbf{J}_2=\mathbf{J}_3=\begin{bmatrix}\lambda_1\end{bmatrix},\ \mathbf{J}_4=\mathbf{J}_5=\begin{bmatrix}\lambda_1&1\\0&\lambda_1\end{bmatrix},\ \mathbf{J}_6=\mathbf{J}_7=\begin{bmatrix}\lambda_1&1&0\\0&\lambda_1&1\\0&0&\lambda_1\end{bmatrix}$$

(I)　$\mathbf{B}=\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I}$ と書く。$\dim N_3=13$、$\dim N_3-\dim N_2=13-11=2$ ゆえ、N_2 から独立な 3 階数一般固有ベクトルは 2 個存在する。そこで、$\mathbf{y},\mathbf{z}\perp N_2\ (\mathbf{y},\mathbf{z}\in N_3)$ とする。（復習：これは N_2 の任意基底に $\mathbf{y},\mathbf{z}$ を追加すると N_3 の基底になる、ということ。）そして、鎖列 $C_1=\{\mathbf{y},\mathbf{By},\mathbf{B}^2\mathbf{y}\},\ C_2=\{\mathbf{z},\mathbf{Bz},\mathbf{B}^2\mathbf{z}\}$ を定義する。これらは $\mathbf{J}_6,\mathbf{J}_7$ に対応する鎖列を表す。

(II)　$\dim N_2-\dim N_1=11-7=4$。そして、$\mathbf{By},\mathbf{Bz}\perp N_1\ (\mathbf{By},\mathbf{Bz}\in N_2)$ ゆえ、$\mathbf{w},\mathbf{x},\mathbf{By},\mathbf{Bz}\perp N_1\ \ (\mathbf{w},\mathbf{x},\mathbf{By},\mathbf{Bz}\in N_2)$ を満たすベクトル $\mathbf{w},\mathbf{x}$ を新たにとる。そして

鎖列 $C_3 = \{\mathbf{w}, \mathbf{Bw}\}$, $C_4 = \{\mathbf{x}, \mathbf{Bx}\}$ を定義する。これらは $\mathbf{J}_4, \mathbf{J}_5$ に対応する鎖列を表す。

(III)　$\dim N_1 - \dim N_0 = 7 - 0 = 7$、$\mathbf{Bw}, \mathbf{Bx}, \mathbf{B}^2\mathbf{y}, \mathbf{B}^2\mathbf{z} \perp N_0$ $(\mathbf{Bw}, \mathbf{Bx}, \mathbf{B}^2\mathbf{y}, \mathbf{B}^2\mathbf{z} \in N_1)$

ゆえ、$\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{Bw}, \mathbf{Bx}, \mathbf{B}^2\mathbf{y}, \mathbf{B}^2\mathbf{z} \perp N_0$ $(\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{Bw}, \mathbf{Bx}, \mathbf{B}^2\mathbf{y}, \mathbf{B}^2\mathbf{z} \in N_1)$（$\perp$ 記号の左に書くべきベクトルの総数は $\dim N_1 - \dim N_0 = 7$）を満たすベクトル $\mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ を新たにとる。
鎖列 $C_5 = \{\mathbf{t}\}$, $C_6 = \{\mathbf{u}\}$, $C_7 = \{\mathbf{v}\}$ を定義する。これらは $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{J}_3$ に対応する鎖列を表す。

(IV)　$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{Bw} & \mathbf{w} & \mathbf{Bx} & \mathbf{x} & \mathbf{B}^2\mathbf{y} & \mathbf{By} & \mathbf{y} & \mathbf{B}^2\mathbf{z} & \mathbf{Bz} & \mathbf{z} \end{bmatrix}$ とすれば、明らかに

$\mathbf{AV} = \mathbf{VJ} \equiv \mathbf{V}\begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{J}_7 \end{bmatrix}$ が成り立つ。$\mathbf{V}$ の列は一次独立であるから、$\mathbf{V}$ は可逆行列を表す。

ゆえに、上式はジョルダン分解 $\mathbf{A} = \mathbf{VJV}^{-1}$ と同値である。■）

問題 9.7　$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ のジョルダン分解を求めよ。

（略解　$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = (2-\lambda)^6$ であるから、$\mathbf{A}$ は単一固有値 $\lambda_1 = 2$ をもつ。

$N_k = (\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})^k$ の零空間（$k = 0, 1, 2, \cdots$、$N_0 = \{\mathbf{0}\}$）、$\mathbf{B} = \mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I} = \mathbf{A} - 2\mathbf{I}$ とし、$\mathbf{B}, \mathbf{B}^2, \cdots$ を計算すると、

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}^3 = \mathbf{B}^4 = \cdots = \mathbf{0}$$

これより（以下、$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \; 0 \cdots 0 \end{bmatrix}^T, \cdots, \mathbf{e}_6 = \begin{bmatrix} 0 \cdots 0 \; 1 \end{bmatrix}^T$）

$N_1 = span\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$,　$\dim N_1 = 3$
$N_2 = span\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_5\}$, $\dim N_2 = 5$
$N_3 = N_4 = \cdots = \mathbf{C}^{6\times1}$,　$\dim N_3 = \dim N_4 = \cdots = 6$

公式「k次ジョルダンブロックの総数$= 2\dim N_k - \dim N_{k-1} - \dim N_{k+1}$（$k = 1, 2, \cdots$）」を使うと、ジョルダン標準形は１次、２次、３次ジョルダンブロック各１個からなることがわかる。

ゆえに、$\mathbf{A}$のジョルダン標準形は$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$である。

残された仕事はジョルダン分解$\mathbf{A} = \mathbf{VJV}^{-1}$を与える可逆行列$\mathbf{V}$の構築であるが、これは9.4節で学んだ構築法のリピートである（前問参照。)。そのような$\mathbf{V}$の例：

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{y} & \mathbf{Bx} & \mathbf{x} & \mathbf{B}^2\mathbf{w} & \mathbf{Bw} & \mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ■)$$

問題 9.8（コンパニオン行列のジョルダン標準形）

3 次方程式$f(\lambda) \equiv \lambda^3 - a_1\lambda^2 - a_2\lambda - a_3 = 0$（$a_1, a_2, a_3$は既知複素数）のコンパニオン行列

$\mathbf{K} \equiv \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$の特性多項式は$\det(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{I}) = -(\lambda^3 - a_1\lambda^2 - a_2\lambda - a_3) = -f(\lambda)$ゆえ、

「$f(\lambda_1) = 0 \leftrightarrow \lambda_1$は$\mathbf{K}$の固有値」が成り立つ。（コンパニオン行列はレッスン 7, 7.1 節例 4 で定義している）。

(I)　λ_1を$\mathbf{K}$の固有値とすれば、対応する固有ベクトルは$\begin{bmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_1 & 1 \end{bmatrix}^T$のスカラー倍に限られることを示せ。（これより相異なる固有値に対応するジョルダンブロックは１個のみであることがわかる。）

(II) 与えられたn次多項式を

$$f(\lambda) = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - \cdots - a_n = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_p)^{n_p} \quad (n_1 + \cdots n_p = n)$$

とする。ここに $\lambda_1,\cdots,\lambda_p$ は相異なる複素数を表す。すると、 $f(\lambda)$ のコンパニオン行列

$\mathbf{K}\equiv\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & 1 & 0 \end{bmatrix}$ の特性多項式は $\det(\mathbf{K}-\lambda\mathbf{I})=(-1)^n f(\lambda)$ によって与えられることを示

せ。また、$\mathbf{K}$ のジョルダン標準形は $\mathbf{J}=\begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{J}_p \end{bmatrix}$, $\mathbf{J}_1=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & & \lambda_1 \end{bmatrix}: n_1\times n_1,\cdots$

によって与えられることを示せ。

(III) $f(\lambda)=0$ の根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ がすべて相異なるとき、$\mathbf{K}$ のジョルダン分解は

$$\mathbf{K}=\mathbf{V}\mathbf{J}\mathbf{V}^{-1},\ \mathbf{J}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{bmatrix},\ \mathbf{V}=\begin{bmatrix} \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \\ \lambda_1^{n-2} & \cdots & \lambda_n^{n-2} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

によって与えられることを示せ。また、

$$\det\mathbf{V}=\{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\cdots(\lambda_1-\lambda_n)\}\{(\lambda_2-\lambda_3)\cdots(\lambda_2-\lambda_n)\}\cdots(\lambda_{n-1}-\lambda_n)$$

を示せ。ここに、$\mathbf{V}$ はヴァンデルモンド行列 Vandermonde matrix と呼ばれる行列である。名は 18 世紀のフランス人数学者・音楽家 Alexandre-The'ophile Vandermonde (1735-96)に因む。

問題 9.9　多項式 $g(\lambda)$ が n 次行列 $\mathbf{A}$ の最小多項式 minimal polynomial であるとはそれが $g(\mathbf{A})=\mathbf{0}$ を満たす最小次の多項式であることをいう。いま、$\mathbf{A}$ の相異なる固有値を $\lambda_1,\cdots,\lambda_p$、特性多項式を $\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=(\lambda_1-\lambda)^{n_1}\cdots(\lambda_p-\lambda)^{n_p}$ $(n_1+\cdots+n_p=n)$、固有値 λ_k に対応するジョルダンブロックの最大次数を l_k とすれば（$k=1,\cdots,p$）、$\mathbf{A}$ の最小多項式は $g(\lambda)=c\cdot(\lambda-\lambda_1)^{l_1}\cdots(\lambda-\lambda_p)^{l_p}$ $(c\neq 0)$ によって与えられることを示せ。

（略証　$\mathbf{A}$ のジョルダン分解を $\mathbf{A}=\mathbf{V}\mathbf{J}\mathbf{V}^{-1}$、$\mathbf{J}=\begin{bmatrix}\mathbf{J}^{(1)} & & \mathbf{0}\\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{J}^{(p)}\end{bmatrix}$（$\mathbf{J}^{(1)}$ は λ_1 に対応するジョルダンブロックのみをまとめたもの、$\cdots$）、$f(\lambda)$ を任意の多項式とすれば、$f(\mathbf{A})=\mathbf{V}f(\mathbf{J})\mathbf{V}^{-1}$ が成り立つ。ゆえに

$$g(\mathbf{A})=\mathbf{0} \leftrightarrow \ g(\mathbf{J}^{(k)})=\mathbf{0}\ (k=1,\cdots,p) \leftrightarrow g(\lambda)=c_k\cdot(\lambda-\lambda_k)^{l_k}\ (k=1,\cdots,p) \quad ■）$$

問題 9.10　行列 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a & \varepsilon\\ 0 & a\end{bmatrix}$ $(\varepsilon\neq 0)$ のジョルダン分解を求めよ。$\varepsilon=0$ の場合はどうか？

（略解　固有値は a,a で与えられる。$\mathbf{B}=\mathbf{A}-a\mathbf{I}=\begin{bmatrix}0 & \varepsilon\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ とおけば、$\mathbf{B}^2=\mathbf{0}$。ゆえに $\mathbf{A}$ は 2 階一般固有ベクトルをもつ。たとえば、$\mathbf{w}=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}^T$ は 2 階一般固有ベクトルである。ゆえに $\mathbf{V}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}\mathbf{w} & \mathbf{w}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ をとれば、ジョルダン分解 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & 1\\ 0 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\equiv\mathbf{V}\mathbf{J}\mathbf{V}^{-1}$ が得られる。一方、$\varepsilon=0$ なら $\mathbf{A}$ のジョルダン分解は $\mathbf{A}=\mathbf{I}\mathbf{A}\mathbf{I}^{-1}$ である。以上から、ジョルダン標準形の形は行列の成分が少し変化しただけで大きく変わりうることがわかる。■）